ANALIZĂ MATEMATICĂ CU PROGRAME TABELARE

Prof.dr.univ. Radu Gologan,
președinte al Societății de Științe Matematice din România

Softurile tabelare, construite în principal pentru analiza și gestionarea datelor din situațiile vieții cotidiene (economico-financiare, cuantificarea unor situații, studiul de evoluție în modele etc.) pot fi utilizate în matematică, pentru exemplificarea unor fenomene ce descriu serii numerice sau în modele matematice ce se pot aproxima prin astfel de serii de date. În plus este o modalitate la îndemana oricărui profesor de matematică, ca, fără programe speciale pentru calculator, să atragă elevii spre frumusețea matematicii asistată de calculator.

În exemplul sugestiv ce urmează, și în alte note asemănătoare ce vor face obiectul numerelor următoare al revistei, vom deduce din datele numerice gestionate în Excel, comportamentul asimptotic al unui șir definit recurent, oferind astfel o bază experimentală pentru o demonstrație teoretică a rezultatului bănuit astfel. În esență, acesta este rolul simulării cu mijloacele informaticii moderne: a oferi informații asupra unui posibil rezultat teoretic general.

Un program tabelar modern dispune de suficiente facilități pentru a face astfel de studii numerice și grafice.

Iată exemplul: ne propunem să studiem comportamentul la limită al șirului definit prin

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n$$

$$a_0 \cong 0{,}10$$

pentru n = 1, 2, 3, …, și eventual să determinăm dependența acestui comportament față de „data inițială” a > 0.

Vom folosi coloanele tabelului, de exemplu până la linia 31 (acest număr poate varia în funcție de problemă și limita de calcul a softului ales). Pe coloana A vom genera numerele naturale 1, 2, 3, …, 31, de exemplu punând A1=1, A2=A1+1, și apoi copiind formula până la linia 31. Vom începe studiul cu A1=1, șirul x_n fiind generat pe coloana B.

Așezăm data inițială *a* = 1 (pentru început) în B1 și în B2 formula pentru

$$x_2 = \left(1 + \frac{1}{\mathrm{B1}}\right)^{\mathrm{A1}}$$

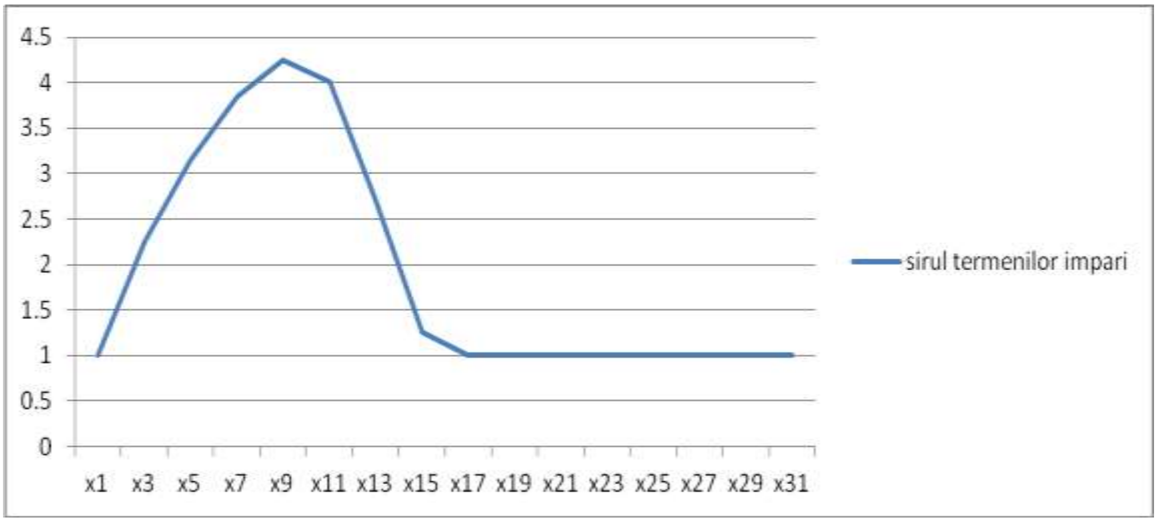
Copiem apoi formula pe toata coloana B și pe încă câteva coloane în care vom schimba pe rând data inițiala din C1, D1, ...

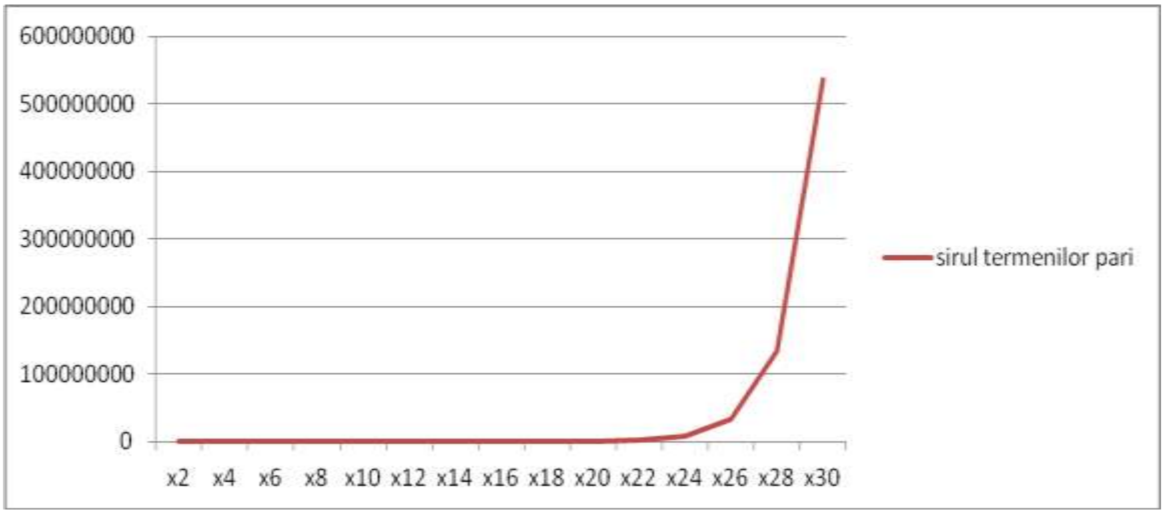
Cu „*Insert Charts*” putem vedea si grafic rezultatele.

D10 f_x =(1+1/D9)^$C9

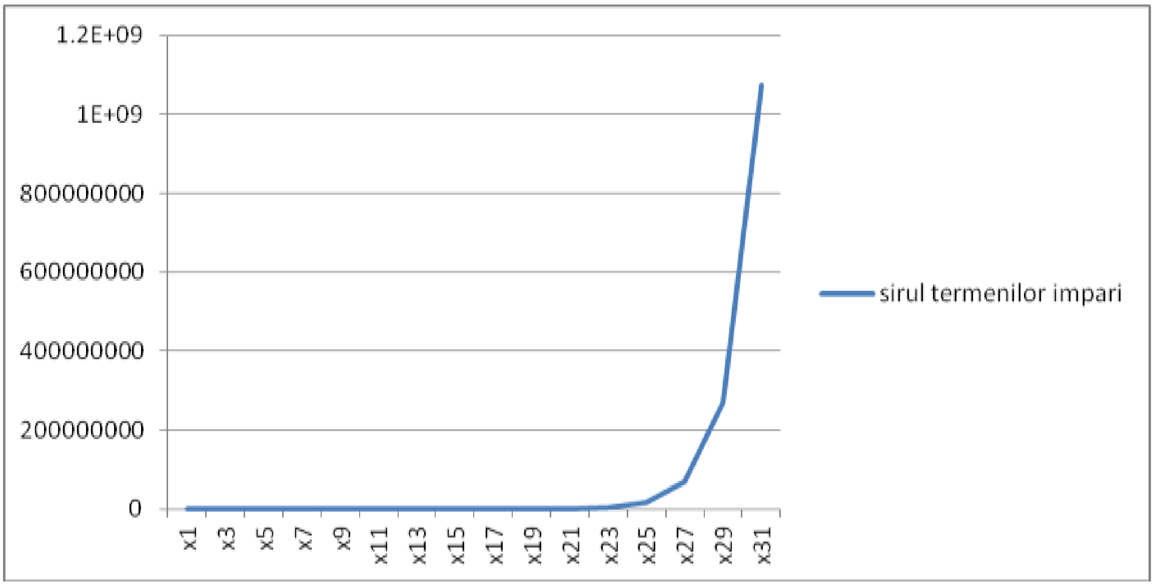
	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	2	0.1	0.2	1.1	1.2
2	2	2	2.25	121	36	3.6446281	3.3611111
3	3	2.25	2.2873198	1.0186912	1.0635876	1.7255195	1.7968306
4	4	3.01371742	2.2923838	4.7796549	4.5541173	2.8451179	2.7512443
5	5	3.14613287	2.2930617	1.5457312	1.5762617	1.9946437	2.0354515
6	6	3.97494184	2.2931523	3.1394773	3.0849736	2.5390961	2.5002856
7	7	3.84364595	2.2931644	1.8852999	1.9038028	2.141425	2.163024
8	8	5.04664897	2.293166	2.6533889	2.6329378	2.4078931	2.3903775
9	9	4.24710771	2.2931663	2.082137	2.0923023	2.2177943	2.2287447
10	10	6.70564159	2.2931663	2.4582384	2.4493615	2.347797	2.3395844
11	11	4.01499194	2.2931663	2.1873495	2.1926097	2.2561795	2.2616081
12	12	11.5462559	2.2931663	2.3711503	2.3670596	2.3194282	2.3155093
13	13	2.70941516	2.2931663	2.2409876	2.2436229	2.2751263	2.2777873
14	14	59.3729354	2.2931663	2.3305165	2.3285802	2.3058476	2.3039619
15	15	1.26343469	2.2931663	2.2676551	2.2689537	2.2843938	2.2856909
16	16	6283.87527	2.2931663	2.3111703	2.3102421	2.299303	2.2983921
17	17	1.00254924	2.2931663	2.280746	2.2813807	2.2889067	2.2895373
18	18	128267.713	2.2931663	2.3018714	2.3014239	2.296139	2.2956981
19	19	1.00014034	2.2931663	2.287132	2.2874409	2.2910994	2.2914056
20	20	523589.539	2.2931663	2.2973815	2.2971651	2.2946071	2.2943935
21	21	1.0000382	2.2931663	2.2902375	2.2903876	2.2921638	2.2923123
22	22	2096311.06	2.2931663	2.2952088	2.295104	2.2938647	2.2937612
23	23	1.00001049	2.2931663	2.2917455	2.2918183	2.2926801	2.2927521
24	24	8387595.66	2.2931663	2.2941564	2.2941056	2.2935049	2.2934547
25	25	1.00000286	2.2931663	2.2924772	2.2925125	2.2929305	2.2929655
26	26	33553231.9	2.2931663	2.2936463	2.2936217	2.2933305	2.2933061
27	27	1.00000077	2.2931663	2.2928321	2.2928493	2.293052	2.2930689
28	28	134216324	2.2931663	2.293399	2.2933871	2.2932459	2.2932341
29	29	1.00000021	2.2931663	2.2930042	2.2930126	2.2931109	2.2931191
30	30	536869288	2.2931663	2.2932791	2.2932733	2.2932049	2.2931992
31	31	1.00000006	2.2931663	2.2930877	2.2930917	2.2931394	2.2931434

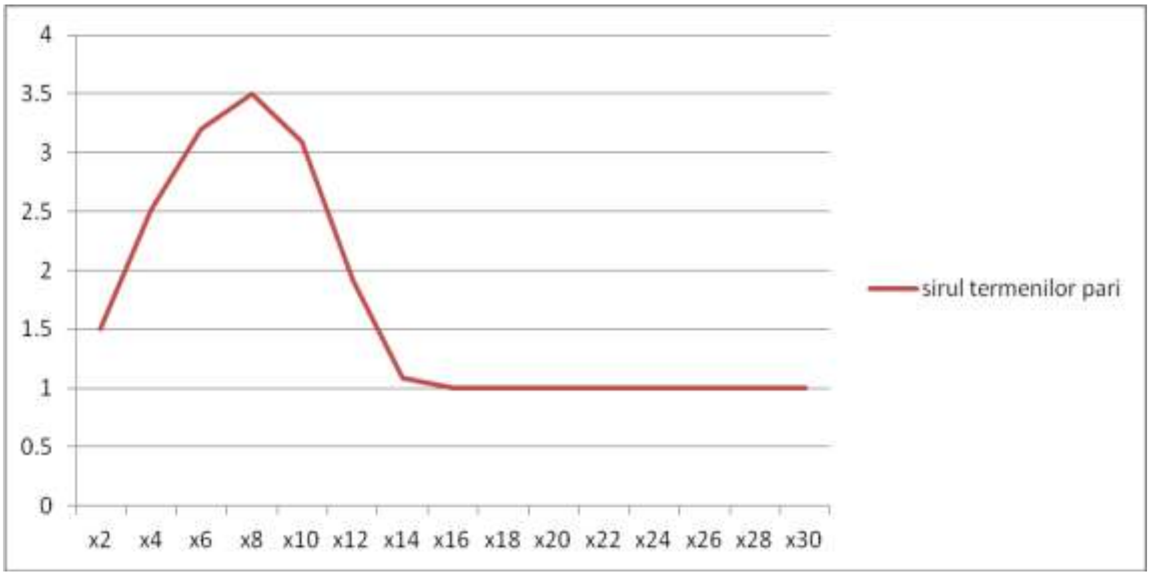
- Pentru a = 1 șirul numeric susține ideea că subșirul termenilor impari converge rapid la 1, iar cel al termenilor pari puternic crescător la infinit:



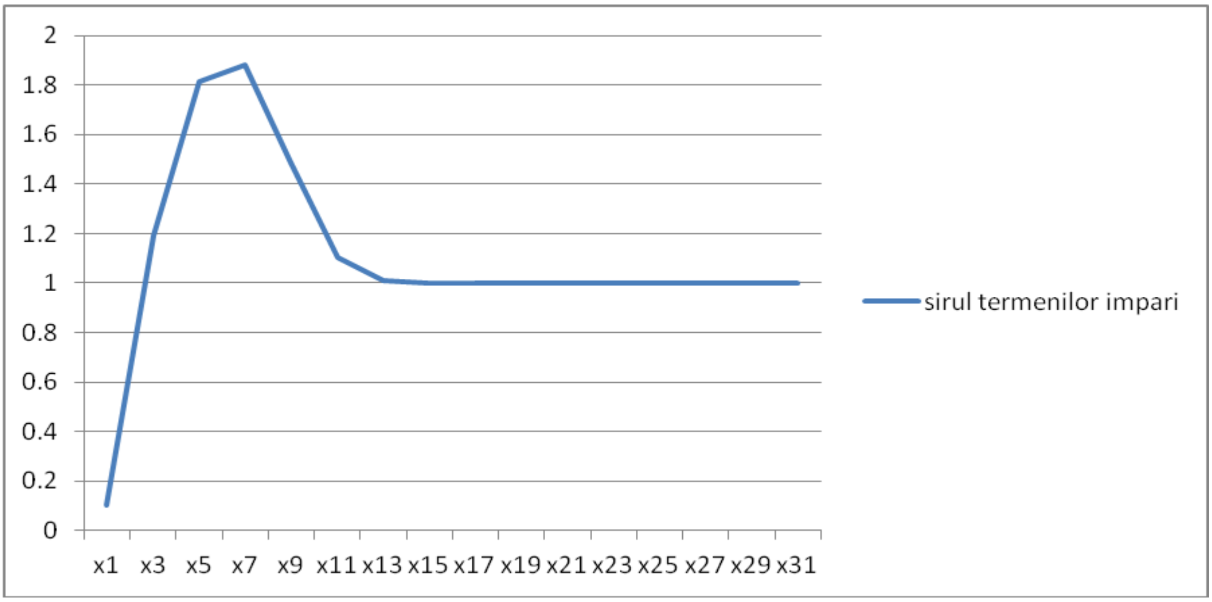


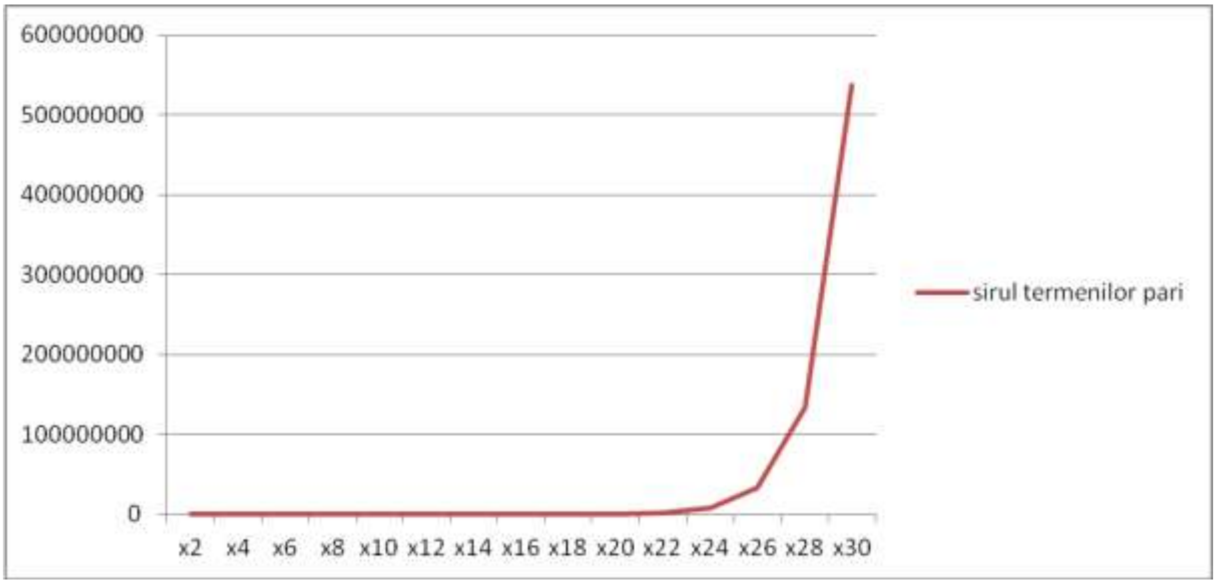
- Pentru a = 2, comportamentul este schimbat, în sensul că șirul termenilor pari tinde la 1 și cel al termenilor impari la infinit:



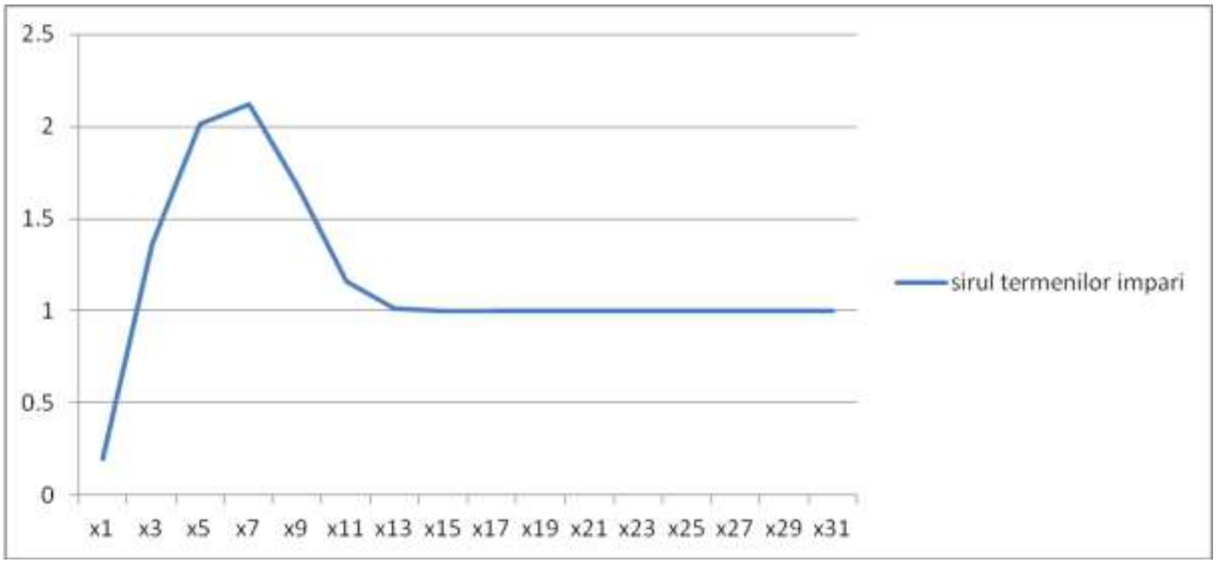


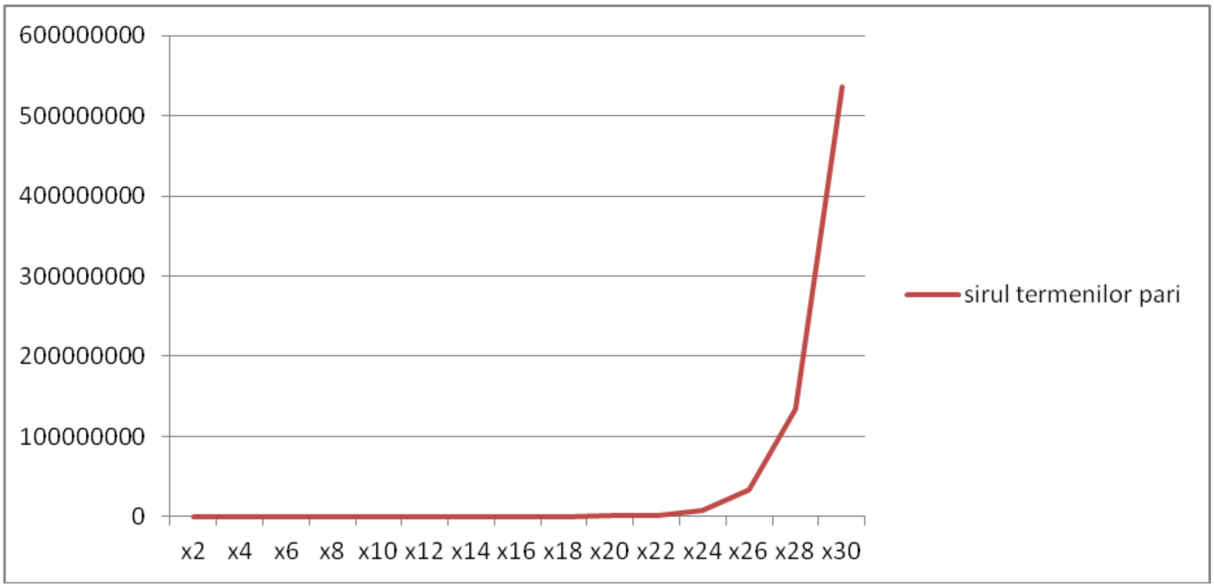
- Pentru a = 0,1 se produce o schimbare: șirul termenilor impari converge la 1 și al celor pari la infinit:





- Pentru a = 0,2 se remarcă același comportament ca cel pentru a = 1, iar prin încercări successive (coloane noi, formula copiată și date inițiale schimbate), rezultă că probabila tranziție de fază, adica schimbarea bruscă a comportamentului șirului se produce pentru o valoare *a* care cu două zecimale exacte este *a* = 0,10.





Urmează faza demonstrației teoretice a rezultatelor justificate de calcule numerice ce va aparține matematicianului, și anume:

Teoremă: Pentru șirul definit prin:

$$x_1 = a, x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n$$

există un număr real $a_0 \approx 0{,}10$ *cu următoarea proprietate:*

- *Pentru* $a \in (0, a_0)$ *șirul* x_{2n} *tinde la infinit iar șirul* x_{2n+1} *converge la 1;*
- *Pentru* $a \in (a_0, 1]$ *șirul* x_{2n} *converge la 1 iar șirul* x_{2n+1} *tinde la* ∞*;*

Acest fapt a fost demonstrat de fapt, într-o lucrare publicată în 1990 de matematicianul român Ciprian Foias. Punctul a_0 din enunț se numește punct critic și corespunde noțiunii de „tranziție de fază” din fizică.

Lăsăm pe seama cititorului ca exercițiu să observe că pe intervalul (1, 2) mai apare un punct critic, aăa cum se vede din cele câteva calcule din tabel. Calculați-l cu două zecimale exacte.

Invit cititorii să foloseasca acest mod de anliză pentru studiul altor șiruri, mai mult sau mai puțin elementare. În situațiile în care răspunsul teoretic nu poate fi intuit, se vor putea obține suficiente informații numerice pentru a ajuta tratarea teoretică. Profesorii de matematică au mai sus un model prin care îi pot atrage pe elevii pasionați de informatică spre studiul analizei matematice fără a avea resurse speciale informatice.