ComputerMath – Explorarea matematicii folosind calculatorul și sofware-ul educațional

Prof. Drd. Octavia-Maria Nica
Universitatea Babeș-Bolyai, Catedra de Matematică Aplicată, Loc. Cluj-Napoca, Jud. Cluj
E-mail: octavia.nica@math.ubbcluj.ro
Școala cu clasele I-VIII Oșorhei, Loc.Oșorhei, Jud. Bihor
E-mail: octy_mn@yahoo.com

Abstract: *Zi de zi devenim din ce în ce mai conștienți de valențele benefice pe care calculatorul le are în predarea, învățarea, evaluarea diferitelor discipline școlare. Rămâne de remarcat însă faptul că această valoare metodologică indiscutabilă este „inspirată”,preluată, prelungită din viaţa de zi cu zi, unde, la momentul actual, nu mai există multe domenii în care calculatorul să nu joace un rol fundamental în rezolvarea problemelor curente. Conţinuturile prevăzute de programele şcolare şi nu numai furnizează cunoştinţe de bază în domeniul matematicii având o largă aplicabilitate în alte domenii ale vieţii sociale. Astfel, studiul matematicii iese din sfera abstractului, iar elevii/studenții observă concret utilitatea învăţării unor noţiuni. Prin elaborarea unor modele matematice, elevii/studenții realizează că pot influenţa desfăşurarea şi chiar derularea unor evenimente din viaţa lor, acest fapt ducând tocmai la lărgirea orizonturilor de cunoaştere, la dezvoltarea spiritului de independenţă şi de iniţiativă în a aborda proiecte noi.*

1. Calculatorul – o necesitate în sistemul educațional

Într-o societate bazată pe cunoaştere şi informaţie, educaţia este în continuă transformare, evoluând de la un sistem tradiţionalist la un proces marcat de interacţiunea determinată de tehnologiile informaţionale. Calculatorul este util în procesul instructiv-educativ şi trebuie folosit astfel încât să urmărească achiziţionarea unor cunoştinţe şi formarea unor deprinderi care să permită elevului să se adapteze cerinţelor societăţii. Actul învăţării va deveni rodul interacţiunii elevilor cu calculatorul şi al colaborării cu profesorul. Utilizarea calculatorului are numeroase avantaje, cum ar fi aceea de a:

- ☑ stimula capaciatea de învăţare inovatoare/creativă;
- ☑ întări motivaţia elevilor/studenților în procesul de învăţare/evaluare-autoevaluare;
- ☑ determina o atitudine pozitivă a elevilor/studenților faţă de disciplina de învăţământ la care este utilizat;
- ☑ facilita prelucrarea rapidă a datelor, efectuare a calculelor, afişare a rezultatelor, realizare de grafice, de tabele;
- ☑ asigura alegerea şi folosirea strategiilor adecvate pentru rezolvarea diverselor aplicaţii;
- ☑ simula fenomene şi procese complexe pe care cadrul didactic nu le poate pune foarte bine în evidenţă;
- ☑ oferi elevilor/studenților modelări, justificări şi ilustrări ale conceptelor abstracte, ale proceselor neobservabile sau greu observabile;
- ☑ reduce timpul necesar prelucrării datelor experimentale în favoarea unor activităţi de învăţare.

Calculatorul, prin mijloacele de care dispunem devine astfel un “partener” în educație.

Utilizarea calculatorului în procesul de învățământ devine o necesitate în condițiile dezvoltării accelerate a tehnologiei informației. Pentru noile generații de elevi și studenți, deja obișnuiți cu avalanșa de informații multimedia, conceptul de asistare a procesului de învățământ - calculatorul este o cerință intrinsecă. Conceptul de asistare a procesului de învățământ cu calculatorul include: predarea unor lecții de comunicare de cunoștințe, aplicarea, consolidarea, sistematizarea noilor cunoștințe; verificarea automată a unei lecții sau a unui grup de lecții. Numită de unii ca "inovația tehnologică cea mai importantă a pedagogiei moderne", instruirea asistată de calculator contribuie la eficiența instruirii, este un rezultat al introducerii treptate a informatizării în învățământ. Interacțiunea elev-calculator permite diversificarea strategiei didactice, facilitând accesul elevului la informații mai ample, mai logic organizate, structurate variat, prezentate in modalități diferite de vizualizare. De fapt, nu calculatorul in sine ca obiect fizic, produce efecte pedagogice imediate, ci calitatea programelor create si vehiculate corespunzător, a produselor informatice, integrate după criterii de eficiență metodică în activitățile de instruire. Modernizarea pedagogică implică așadar, existența echipamentelor hardware (calculator), a software-lui (programelor) și a capacității de adaptare a lor, de receptare și valorificare în mediul instrucțional.

Pe langă hardware si software, tehnologia înseamnă si alte resurse de informare, înafară de profesor ca furnizor de cunoștințe. Comunicarea cu specialişti, acces la biblioteci virtuale, articole ştiințifice sunt posibilități ce se oferă celui ce vrea să se informeze, prin utilizarea facilitătilor oferite de legatura la rețeaua globală, "Internet" și a aplicațiilor specifice acesteia. Școala trebuie să tina pasul cu tehnologia, să înțeleagă și să anticipeze impactul aspra modului de învățare. Calculatoarele au fost încorporate în programele educaționale oferindu-le celor ce se instruiesc o libertate și flexibilitate mai mare dar și individualitate în clasă. Folosirea Internetului de către elevi a fost o idee care a prins repede. Afinitatea naturală dintre elevi/studenți și Internet a dat nastere mai multor proiecte orientate inspre elevi/studenți, inițiate de elevi/studenți, conduse de elevi/studenți.

Învățarea care pune accentul pe participarea elevilor reprezintă un tip de instruire care ii dă elevului un rol activ în procesul de învățare. Elevii, participanți activi, își imprimă ritmul propriu și propriile strategii. Modalitatea de învățare este individualizată nu standardizată. Învățarea care îl situează pe elev în rolul central, asociază învățarea focalizată pe particularitățile fiecărui individ (ereditate, experiență, perspective, pregătire, talente, capacități și nevoi) cu focalizarea pe predare, împărtășire a cunoștințelor respective (cea mai bună informație ce se furnizează, stimularea motivației, învățarii și acumulării de cunoștințe de către toți elevii). Acomodarea încă din școală cu tehnica de calcul influențează formarea intelectuală a elevilor, prin:

- ☑ *Stimularea interesului față de nou.* Legea de bază ce guvernează educația asistată de calculator o reprezintă implicarea interactivă a elevului în acțiunea de prezentare de cunoștințe, captâindu-i-se atenția subiectului și eliminând riscul plictiselii sau rutinei.
- ☑ *Stimularea imaginației.* De la jocurile pe calculator care dezvoltă abilități de utilizare a imaginației și viteză de reacție într-o prezentare grafică atractivă, maturizându-se, elevul/studentul începe să folosească calculatorul, să creeze propriile produse soft.
- ☑ *Dezvoltarea unei gândiri logice*. Descompunerea unei teme în etape de elaborare organizate secvențial, organizarea logică a raționamentului, reprezintă demersuri cognitive ce aduc câștig în profunzimea și rapiditatea judecării unei probleme.

- ☑ Simularea pe ecran a unor fenomene și procese, altfel costisitor de reprodus in laborator, ajută la înțelegerea acestora.
- ☑ Optimizarea randamentului predării prin exemplificări multiple.
- ☑ Formarea intelectuală a tinerei generații prin autoeducație.
- ☑ Cerințe pentru realizarea instrurii asistate de calculator cum ar fi dotarea cu echipament și faptul că profesorul trebuie sa aibă și cunoștințe de informatică.
- ☑ Elevul învață în ritm propriu, fără emoții și stres care să-i modifice comportamentul.
- ☑ Aprecierea obiectivă a rezultatelor și progreselor obținute. Sistemul instruirii asistate de calculator este un mediu integrat hardware-software destinat interacțiunii dintre posesorii unui sistem de cunoștințe și destinatarii acestuia, în vederea asimilării active de informație însoțită de achiziționarea de noi operații și deprinderi.

Softul educațional este un produs program special proiectat pentru a fi utilizat in procesul de învățare. Softul educațional este conceput pentru a învăța, el trebuie să asigure interacțiunea flexibilă elev-computer sau computer-profesor, adaptându-se in functie de caracteristicile individuale ale utilizatorului. Voi insista în cadrul acestei lucrări asupra impactului pe care îl are calculatorul și softul educațional/informatic în învățarea și înțelegerea matematicii. Din această perspectivă, voi expune câteva din comenzile de bază folosite de programul Maple, utile în rezolvarea diferitelor probleme de algebră sau analiză matematică și nu numai.

2. Introducere în MAPLE

Maple este un program de calcul simbolic, algebric ce manipulează informaţia într-o manieră simbolică sau algebrică. Cu ajutorul lui se pot obţine soluţii analitice exacte la multe probleme matematice, incluzând integrale, sisteme de ecuaţii, ecuaţii diferenţiale şi probleme de algebră liniară. Maple conţine diverse posibilităţi grafice pentru vizualizarea unor complicate informaţii matematice, algoritmi numerici, pentru estimarea şi rezolvarea problemelor a căror soluţie nu se poate determina prin calcul elementar. Maple este o unealtă ce ajută la învăţarea, descoperirea şi rezolvarea problemelor matematice, oferind elevilor o multitudine de căi de a-şi îmbunătăţi aptitudinile şi cunoştinţele matematice printr-o înţelegere sistematică. Este clar că actualii şi viitorii elevi trebuie să fie apţi să utilizeze noua tehnologie. Conceptul de Computer-Math este evidenţiat prin intermediul acestui program. Maple este disponibil în diferite variante (MAPLE 8, MAPLE 10, MAPLE 12 etc.), în funcție de sistemul de operare instalat pe calculatorul pe care se lucrează.

MAPLE dispune de peste 2000 de funcţii predefinite şi comenzi. Fiecare *comandă* este introdusă, în zona input, în felul următor:

```
> nume_comanda(param1,param2,...);
```

Numele comenzii a fost ales astfel încât pe de o parte să fie apropiat de funcţionalitatea comenzii şi pe de altă parte să fie cât mai scurt posibil. MAPLE este un mediu “case-sensitive” (se face distincţie între literele mari şi literele mici). Cele mai multe comenzi încep cu literă mică

şi au în corespondenţă o aceeaşi comandă care începe cu literă mare. Aceasta din urmă poartă denumirea de ***comanda inertă*** şi rolul ei este doar de afişare matematică a unei expresii. Cele mai multe comenzi MAPLE necesită o listă de parametri la intrare. Această listă poate conţine de exemplu, numere, expresii, mulţimi, etc., sau poate să nu conţină nici un parametru. Indiferent de numărul de parametri specificaţi, ei trebuie incluşi între paranteze rotunde (). Toate comenzile au număr minim de parametri de tip precizat, de cele mai multe ori într-o ordine precizată. Multe comenzi pot fi utilizate cu un număr de parametri mai mare strict decât acest număr minim de parametri. Aceşti „extra" parametri reprezintă de obicei opţiuni de control al funcţionării comenzii respective. Comenzile MAPLE pot fi folosite ca parametri. Acestea sunt evaluate şi rezultatele lor sunt inserate în lista de parametri.

Comenzile MAPLE se pot clasifica în trei categorii:

1. Comenzi care se încarcă automat la deschiderea unei sesiuni MAPLE. Acestea pot fi apelate direct aşa cum s-a precizat mai sus.

2. Comenzi din biblioteca extinsă. Înainte de a le folosi acestea trebuie mai întâi încărcate în memorie cu ajutorul comenzii **readlib** sub forma

```
> readlib(nume_comanda);
```

3. Comenzi care aparţin unor pachete specializate. Există două modalităţi de utilizare a acestor comenzi:

- prin specificarea pachetului sub forma:

```
> nume_pachet[nume_comanda](param1,param2,...);
```

- cu ajutorul comenzii **with**. Un apel de forma

```
> with(nume_pachet);
```

are ca urmare încărcarea în memorie şi afişarea în zona ouput a tuturor comenzilor din pachet. Până la încheierea sesiunii MAPLE acestea pot fi utilizate ca şi cele din prima categorie.

Din cele de mai sus rezultă că nu este întotdeauna suficient să se cunoască numele unei comenzii. Uneori ea trebuie încărcată din bibliotecă sau dintr-un pachet. Dacă nu s-a făcut acest lucru şi s-a introdus comanda, MAPLE nu generează un mesaj de eroare, ci afişează în zona output, comanda introdusă în zona input. În acest caz trebuie verificat dacă este scrisă corect comanda (inclusiv dacă literele mari şi mici se potrivesc), sau trebuie încărcată în memorie. Informaţii asupra modului corect de introducere a unei comenzi se pot obţine cu ajutorul comenzii **help**. Există mai mute modalităţi de utilizare a acestei comenzi. Este recomdabilă, urmatoarea formă:

```
> ? nume_comanda
```

O comandă de forma:

```
> ?
```

afişează informaţii generale despre structura help-ului.

Altă variantă presupune un apel de forma

```
> help(`nume_comanda`);
```

De remarcat faptul că numele comenzii este inclus între apostrofuri întoarse (backquotes). În cadrul acestei lucrări, toate aplicaţiile sunt implementate în varianta Maple 12, compatibilă cu sistemul de operare Windows 7.

3. Operatori, constante, funcţii predefinite şi expresii

O expresie este o combinaţie validă de operatori şi variabile, constante, şi apeluri de funcţii.

Operaţie	Operator	Exemple
Adunare	+	`x+y`
Scădere	-	`x-y`
Opus	-	`-x`
Înmulţire	*	`x*y`
Împărţire	/	`x/y`
Ridicare la putere (xy)	** sau ^	`x**y` sau `x^y`

Tabelul precedent conţine operatorii aritmetici de bază din MAPLE. Precedenţa operatorilor este aceeaşi ca în majoritatea limbajelor de programare. Mai întâi sunt evaluate expresiile din paranteze. În lista următoare prioritatea cade de sus în jos:

1. – (operator unar)
2. **, ^
3. *, /
4. +, - (scădere)

De remarcat faptul că exponenţierea succesivă nu e validă. Astfel MAPLE nu poate evalua x^y^z. O expresie de acest fel trebuie introdusă sub forma x^(y^z). Ori de câte ori există ambiguităţi trebuie utilizate parantezele ( ).

Când este introdus un număr întreg in expresia radicalului, MAPLE execută un *calcul simbolic*, iar dacă este introdus un numar zecimal, MAPLE executa un *calcul numeric* cu o precizie de 10 zecimale. Functia "evalf" returneaza valoarea numerica a expresiei precizate.

```
> evalf(sqrt(5));
```

2.236067977

```
> (1/5)^3;
```

1125

```
> (0.2)^3;
```

0.008

```
> evalf((1/5)^3);
```

0.008000000000

Se pot atribui valori unor variabile folosind comanda ":="

```
> x:=1;y:=2;
```

x:= 1

y:= 2

```
> (x^2+y^2)/(2*x*y);
```

54

```
> evalf(%);
```

1.250000000

Atunci când dorim evaluarea numerică a expresiei precedente putem folosi comanda **evalf(%) .** Pot fi definite si cu litere grecesti:

```
> alpha, beta, gamma, Alpha, Beta, Gamma;
```

α,β,γ,A,B,Γ

Observatie: Expresia "Pi" are atribuita valoarea numerica a acestui numar, pe cand expresia "pi" returneaza litera respecctiva

```
> pi; evalf(pi);
```

$$\pi$$

$$\pi$$

```
> Pi; evalf(Pi);
```

$$\pi$$

$$3.141592654$$

```
> alpha:=3*Pi/4;
```

$$\alpha := 3\pi/4$$

```
> sin(alpha);cos(alpha);tan(alpha);cot(alpha);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-1$$

$$-1$$

Următorul tabel prezintă funcţiile de bază din MAPLE ce pot interveni în expresiile aritmetice.

Notaţie MAPLE	Semnificaţie
`abs(x)`	$\lvert x \rvert$ (modulul)
`iquo(x,y)`	partea întreagă a împărţirii `x/y`
`irem(x,y)`	restul împărţirii lui `x` la `y`
`trunc(x)`	cel mai mare număr întreg $\le$ `x`, dacă $x \ge 0$, sau cel mai mic număr întreg $\ge x$, dacă $x < 0$
`frac(x)`	x - trunc(x)
`round(x)`	rotunjeşte pe x la cel mai apropiat întreg
`floor(x)`	cel mai mare întreg $\le x$
`ceil(x)`	cel mai mic întreg $\ge x$ $\mathrm{ceil}(x)$
`sqrt(x)`	$\sqrt{x}$
`exp(x)`	$\mathbf{e}^x$
`ln(x)` sau `log(x)`	$\ln(x)$ (logaritm natural)
`sin(x)`	$\sin(x)$
`cos(x)`	$\cos(x)$
`tan(x)`	$\tan(x)$

Facem câteva remarci asupra funcţiilor **irem** şi **iqou** (deoarece nu respectă întocmai teorema împărţirii cu rest). Astfel dacă m şi n sunt două numere întregi, n este nenul şi r este numărul întreg returnat de „irem”, atunci este satisfăcută relaţia:

```
> m = n*q + r, abs(r) < abs(n); m*r>=0;
```

$$m = n\,q + r, \lvert r \rvert < \lvert n \rvert$$

$$0 \le m\,r$$

Dacă *m* şi *n* nu sunt amândouă numere întregi, atunci „irem” ramâne neevaluată.

Ambele funcţii pot fi utilizate şi cu câte trei parametri. Dacă al treilea parametru este prezent în funcţia **irem**, atunci lui i se asignează câtul, iar în cazul funcţiei **iquo** i se asignează restul împărţirii.

Exemple:

```
> irem(29,4,'q');
```

1

```
> q;
```

7

```
> r;
```

r

```
> irem(-29,4);
```

-1

```
> irem(29,-4);
```

1

```
> irem(-29,-4);
```

-1

```
> iquo(-29,4);
```

-7

```
> iquo(29,-4);
```

-7

```
> iquo(-29,-4);
```

7

Funcţiile **rem** şi **quo** se aplică polinoamelor şi reprezintă analoagele funcţiilor „irem” şi „iquo”. Acestea cer obligatoriu al treilea parametru ce indică nedeterminarea în raport cu care se consideră polinomul. Opţional admit al patrulea parametru, cu acelaşi rol ca parametrul 3 din funcţiile „irem” şi „iquo”. Asfel dacă *a* şi *b* sunt două polinoame, *b* este nenul, *r* restul returnat de **rem** şi *q* este câtul returnat de **quo**, atunci este satisfăcută relaţia:

```
> a = b*q + r, grad(r) < grad(n);
```

Exemple:

```
> rem(x^5+2*x+1, x^2+x+1, x, 'q');
```

x

```
> q;
```

$x^3 - x^2 + 1$

```
> quo(x^5+2*x+1, x^2+x+1, x);
```

$x^3 - x^2 + 1$

```
> quo(x^5+2*y+z, x^2+x+1, x,'r');
```

$x^3 - x^2 + 1$

```
> r;
```

$$2y + z - 1 - x$$

Funcţia **factorial (k)** calculează k! (k factorial, 12…k). Acelaşi efect îl are şi **k!**, după cum rezultă din exemplele de mai jos:

```
> factorial(4);
```
$$24$$
```
> 4!;
```
$$24$$
```
> 6!;
```
$$720$$
```
> factorial(factorial(3))=3!!;
```
$$720 = 720$$

Tabelul de mai jos conţine câteva constante MAPLE:

Constantă	Notaţie matematică
pi	π
Infinity	∞
I	i, $i^2 = -1$
Gamma	Constanta lui Euler
True	adevărat, în cazul evaluării booleene
False	fals, în cazul evaluării booleene

De reţinut că **pi** (scris cu litera mică) se referă la litera grecească π.

Tipul booleean în MAPLE are două valori: **true** şi **false**. Expresiile booleene (logice) pot fi formate cu ajutorul operatorilor de comparaţie şi a operatorilor logici.

Următoarele două tabele conţin aceşti operatori.

Operator	Simbol	Exemple
egal	=	`> x=y;` $x = y$
diferit	<>	`> x<>y;` $x \neq y$
mai mare	>	`> x>y;` $y < x$
mai mare sau egal	>=	`> x>=y;` $y \leq x$
mai mic	<	`> x<y;` $x < y$
mai mic sau egal	<=	`> x<=y;` $x \leq y$

Operator	Simbol	Exemple
Negaţie (non) - unar	not	`> not x;`
Conjucţie (şi)	and	`> x and y;`
Disjuncţie (sau)	or	`> x or y`

Ordinea de efectuare a operaţiilor este: **not, and, or**.

În MAPLE există expresii similare cu expresiile din C formate cu operatorul virgulă. Astfel o ***secvenţă de expresii*** în MAPLE este un şir de expresii separate între ele prin virgulă. Cele mai multe funcţii din MAPLE cer la intrare o secvenţă de expresii, şi întorc un rezultat ce conţine o secvenţă de instrucţiuni. Cel mai simplu mod de a crea o secvenţă de instrucţiuni este:

```
> 1,2,3,4,5;
```

$$1, 2, 3, 4, 5$$

```
> a=1,b=a+2,c+2;
```

$$a = 1, b = a + 2, c + 2$$

Alternativ, există alte două moduri de a crea secvenţe de instrucţiuni în MAPLE: cu ajutorul operatorului **$** sau cu ajutorul comenzii **seq**. Următoarele exemple sunt edificatoare:

```
> a$5;
```

$$a, a, a, a, a$$

```
> $2..7;
```

$$2, 3, 4, 5, 6, 7$$

```
> i^2$i=1..3;
```

$$1, 4, 9$$

```
> seq(i!,i=1..4);
```

$$1, 2, 6, 24$$

```
> seq(i!!,i=1..4);
```

$$1, 2, 720, 6204484017332394393600(0$$

Secvenţa vidă este desemnată prin NULL.

Comanda **restart** elibereaza memoria de valorile utilizate. Funcțiile pot fi definite ca operatori, apoi putând fi utilizate pentru diverse calcule sau expresii.

```
> f:=x->sin(x)/x;
```

$$f := x \to \frac{\sin(x)}{x}$$

```
> f(Pi/2);
```

$$\frac{2}{\pi}$$

Constantele numerice din MAPLE sunt de trei tipuri:

- întregi
- raţionale
- în virgulă mobilă

Constantele întregi sunt şiruri de cifre zecimale (0..9) eventual precedate de un semn (+,-) reprezentând un număr întreg. Numărul maxim de cifre permise este dependent de sistem, dar în general este mai mare de 500 000.

Exemple de constante întregi:

```
> 0;
```
$$0$$
```
> 123;
```
$$123$$
```
> -6789;
```
$$-6789$$
```
> 123456789123456789123456789;
```
$$123456789123456789123456789$$

Constantele raţionale utilizează operatorul de împărţire „ / ” pentru a separa numărătorul de numitor. Astfel *m/n* cu *m* şi *n* constante întregi reprezintă numărul raţional $\frac{n}{m}$.

Exemple de constante raţionale:

```
> 2/3;
```
$$\frac{2}{3}$$
```
> -6/7;
```
$$\frac{-6}{7}$$
```
> 4/6;
```
$$\frac{2}{3}$$
```
> 4/2;
```
$$2$$
```
> -39/13;
```
$$-3$$

Se observă că MAPLE face automat simplificarea fracţiilor.

Reprezentarea unei ***constante în virgulă mobilă*** conţine în general câmpurile următoare:

- partea întreagă
- punctul zecimal
- partea fracţionară

e sau **E** şi un exponent cu semn (opţional);

Se poate omite partea întreagă sau partea fracţionară, dar nu amândouă. De asemenea, se poate omite punctul zecimal sau litera **e(E)** şi exponentul, dar nu amândouă.

Exemple de constante în virgulă mobilă:

```
> 2.3;
```
$$2.3$$

```
> 678.96e-9;
```

$$0.67896\,10^{-6}$$

```
> .1234;
```

$$0.1234$$

```
> 123E56;
```

$$0.123\,10^{59}$$

```
> 1.;
```

$$1.$$

Constante în virgulă mobilă pot fi obţinute şi cu comanda **Float**. Această comandă are forma:

Float(mantisa,exponent);

şi întoarce **mantisa*10 ^exponent**.

```
> Float(123,56);
```

$$0.123\,10^{59}$$

Expresiile aritmetice cu operanzi constante întregi sau raţionale sunt evaluate exact în MAPLE (rezultatul este o constantă raţională sau o constantă întreagă).

Exemple:

```
> 1/3+4/5;
```

$$\frac{17}{15}$$

```
> 1/3+8;
```

$$\frac{25}{3}$$

```
> 1/3+2/3;
```

$$1$$

În cazul în care expresia conţine constante în virgulă mobilă, atunci constantele întregi şi cele raţionale (care apar eventual în expresie) sunt convertite în virgulă mobilă (sunt aproximate cu constante în virgulă mobilă). Rezultatul expresiei este în acest caz o constantă în virgulă mobilă.

Exemple:

```
> 1/3.+4/5;
```

$$1.133333333$$

```
> 1./3+8;
```

$$8.333333333$$

```
> 1/3+2/3.;
```

$$1.000000000$$

```
> 20+45.75e-2;
```

20.4575

Orice număr real nenul x poate fi scris sub formă normalizată, în bază 10:

$$x = \pm m\ 10^{p}$$

cu $0{,}1 \le m < 1$, (m = mantisa). În calcule se reţine de obicei un număr finit de cifre zecimale ale mantisei. Numărul de cifre care se reţine se numeşte ***număr de cifre semnificative***. Numărul de cifre semnificative poate fi controlat în MAPLE cu ajutorul variabilei globale **Digits**. Valoarea implicită pentru „digits" este 10.

Exemple:

```
> 1./7;
```

0.1428571429

```
> Digits:=20;
```

Digits := 20

```
> 1./7;
```

0.14285714285714285714

Aşadar, MAPLE poate lucra în virgulă mobilă cu o precizie teoretic "infinită". Pentru a determina evaluarea unei expresii în virgulă mobilă (chiar dacă toţi operanzii din expresie sunt întregi sau raţionali) se poate folosi comanda **evalf.**

evalf(expresie)

determină evaluarea expresiei la o valoare în virgulă mobilă, cu numărul de cifre semnificative stabilit de variabila „Digits".

evalf(expresie,n)

determină evaluarea expresiei la o valoare în virgulă mobilă, utilizând n cifre semnificative (valoarea variabilei „Digits" nu este afectată).

Exemple:

```
> evalf(1/7);
```

0.14285714285714285714

```
> evalf(1/7,20);
```

0.14285714285714285714

```
> evalf(Pi);
```

3.1415926535897932385

```
> evalf(Pi,30);
```

3.14159265358979323846264338328

Există o întreagă familie de funcţii de evaluare numerică şi algebrică a expresiilor:

- **eval** – evaluează în întregime o expresie
- **evala** – evaluează algebric o expresie
- **evalf** – evaluează numeric o expresie
- **evalb** – evaluează boolean o expresie
- **evalm** – evaluează matriceal o expresie

• **evalc**– evaluează în mulţimea numerelor complexe o expresie

În MAPLE un ***şir de caractere*** (**string**) constă dintr-o succesiune de caractere cuprinse între apostrofuri întoarse (backquote) (`). Punctul (.) reprezintă operatorul de concatenare pentru şirurile de caractere în MAPLE.

Exemple:

```
> `Acesta este un string in MAPLE`;
```
Acesta este un string in MAPLE

```
> `1+2=?`;
```
1+2=?

```
> `acesta este. un string`;
```
acesta este. un string

```
> `acesta este`.` un string`;
```
acesta este . un string

Un ***identificator*** în MAPLE este un şir de caractere alfabetice (A-Z, a-z), cifre (0-9) şi caracterul _ (liniuţă de subliniere, underline), şir în care primul caracter este un caracter alfabetic (A-Z, a-z). Un identificator nu poate conţine mai mult de 499 de caractere. MAPLE este case-sensitive, ceea ce înseamnă că identificatorul „nume" este diferit de identificatorul „Nume". Identificatorii nu trebuie inclusi între (`). MAPLE conţine un număr de ***identificatori predefiniţi*** (identificatori rezervaţi). O lista a acestora poate fi obţinută cu comanda:

```
> ? ininame;
```
sau
```
> help (`ininame`);
```

4. Comenzi de calcul

Tabelul de mai jos conţine comenzile din MAPLE pentru diferenţiere, integrare şi însumare.

Notaţie MAPLE	Semnificaţie	Notaţie matematică
diff(f(x),x) `> diff(f(x),x);`	derivată parţială	$\frac{d}{dx}\,\mathrm{f}(x)$
int(f(x),) `> int(f(x),x);`	integrală infinită	$\int \mathrm{f}(x)\,dx$
sum(f(n),n) `> sum(f(n),n);`	suma seriei	$\sum_{n} \mathrm{f}(n)$
int(f(x),x=a..b) `> int(f(x),x=a..b);`	integrală definită	$\int_{a}^{b} \mathrm{f}(x)\,dx$

sum(f(k),k=a..b) > `sum(f(k),k=a..b);`	suma de la a la b	$\sum_{k=a}^{b} f(k)$

Diff, **Int**, **Sum**, reprezintă comenzile inerte corespunzătoare.

Exemple:

```
> diff(sin(x),x);
```

$$\cos(x)$$

```
> diff(cox(x),y);
```

$$0$$

```
> diff(x*sin(cos(x)),x);
```

$$\sin(\cos(x)) - x\cos(\cos(x))\sin(x)$$

```
> diff(ln(x),x);
```

$$\frac{1}{x}$$

```
> diff(ln(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\ln(x)$$

```
> diff(ln(x),x) = diff(ln(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

```
> restart;
> f:=x->3*x^3+2*x^2-5;
```

$$f := x \to 3x^3 + 2x^2 - 5$$

```
> diff(f(x),x);
```

$$9x^2 + 4x$$

```
> y:=x->sqrt(1+x^4);
```

$$y := x \to \sqrt{1 + x^4}$$

```
> diff(y(x),x);
```

$$\frac{2x^3}{\sqrt{1 + x^4}}$$

```
> y:=x->exp(x)*sin(x)*cos(x);
```

$$y := x \to e^x \sin(x)\cos(x)$$

```
> diff(y(x),x);
```

$$e^x \sin(x)\cos(x) + e^x \cos(x)^2 - e^x \sin(x)^2$$

```
>diff(sin(x)*tan(y),x,y)= diff(sin(x)*tan(y),x,y);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}(\sin(x)\tan(y)) = \cos(x)(1 + \tan(y)^2)$$

```
>int( sin(x), x );
```

$$-\cos(x)$$

```
>int( sin(x), x );
```

$$\int \sin(x)\,dx$$

```
> int( sin(x), x=0..Pi );
```

$$2$$

```
> restart;

> int(3*x^3+2*x^2-5,x=0..1);
```

$$-\frac{43}{12}$$

```
> int(1/x^2,x=0..infinity);
```

$$\infty$$

```
> int(exp(-x^2),x=-infinity..infinity);
```

$$\sqrt{\pi}$$

```
> evalf(int(exp(-x^2),x=-infinity..infinity));
```

$$1.77245385$$

```
> int( x^2*ln(x), x=1..3 )=int( x^2*ln(x), x=1..3 );
```

$$\int_1^3 x^2 \ln(x)\, dx = -\frac{26}{9} + 9\ln(3)$$

```
> int( Int(exp(-x^2-y^2), x=0..infinity ), y=0..infinity) =
int(int( exp(-x^2-y^2), x=0..infinity ), y=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{e}^{(-x^2-y^2)}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}$$

```
> sum(k^2,k=1..4);
```

$$30$$

```
> Sum(k^2,k=1..4);
```

$$\sum_{k=1}^{4} k^2$$

```
> Sum(k^2,k=1..n)=sum(k^2,k=1..n);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{6}$$

```
> sum(1/k^2,k=1..infinity);
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
> Sum(1/k!,k=0..infinity)=sum(1/k!,k=0..infinity);
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathbf{e}$$

Limitele de șiruri și funcții se calculează folosind comanda **limit**:

```
> limit(1/n,n=infinity);
```

$$0$$

```
> limit(tan(x)/x,x=0);
```

$$1$$

Se vor prezenta în continuare câteva exemple cu comenzile **expand**, **factor** şi **simplify**. Principalul rol al comenzii **expand** este aplicarea distributivităţii produsului faţă de adunare. Comanda **factor** se aplică pentru descompunerea în factori ireductibili a polinoamelor de mai multe variabile. Iar comanda **simplify** aplică regulile de simplificare într-o expresie.

```
> expand((X^2-Y^2)^2*(X^2+Y^2)^2);
```

$$X^8 - 2\,X^4\,Y^4 + Y^8$$

```
> factor(X^6-Y^6);
```

$$(X - Y)\,(X + Y)\,(X^2 + X\,Y + Y^2)\,(X^2 - X\,Y + Y^2)$$

```
> simplify((X^6-Y^6)/(X^2+X*Y+Y^2));
```

$$X^4 - Y\,X^3 + Y^3\,X - Y^4$$

5. Reprezentări grafice

Comenzile destinate reprezentărilor grafice sunt incluse în pachetul **plots**. Numele pachetului trebuie să preceadă fiecare comandă. Altă variantă presupune încărcarea întregului pachet în memorie cu ajutorul comenzii **with**():

```
> with(plots);
```

[*Interactive*, *animate* , *animate3d* , *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d* , *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d* , *coordplot*, *coordplot3d*, *cylinderplot*, *densityplot*, *display*, *display3d* , *fieldplot*, *fieldplot3d* , *gradplot*, *gradplot3d* , *graphplot3d* , *implicitplot*, *implicitplot3d* , *inequal* , *interactive*, *interactiveparams*, *listcontplot*, *listcontplot3d* , *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple* , *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d* , *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d* , *polyhedra_supported* , *polyhedraplot* , *replot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *sphereplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d* , *tubeplot*]

Prezentăm câteva exemple cu comenzile **plot**, **plot3d** şi **animate3d**. **Plot** este destinată reprezentărilor grafice în plan şi poate fi folosită sub mai multe forme. Prezentăm de fiecare dată numărul minim de parametri ceruţi.

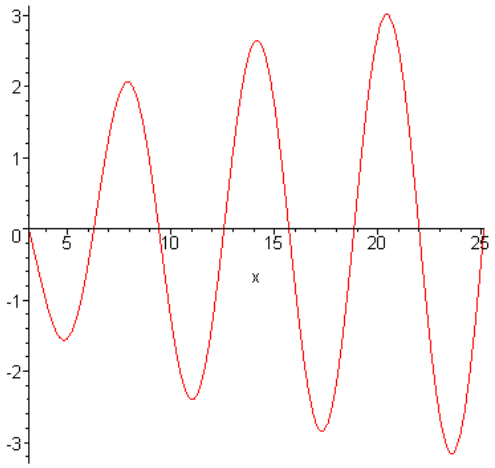
Notaţie MAPLE	**Curba / Curbele reprezentate**
plot(f(x),x = a..b) `> plot(f(x),x = a..b);`	y = f(x), x ∈ [a,b]
plot([f(x),g(x),…],x = a..b) `> plot([f(x),g(x),…],x = a..b);`	y = f(x),y = g(x)…, x ∈ [a,b]
plot([f(t),g(t),t = a..b]) `> plot([f(t),g(t),t = a..b]);`	x = f(t) t ∈ [a,b] y = f(x)

Reprezentarea grafică se face conform cu opţiunile (de stil, culoare, axe, coordonate, rezoluţie …) indicate în comandă sau în raport cu cele implicite. Unele din aceste opţiuni se pot stabili şi din meniul contextual: se introduce comanda de reprezentare grafică a curbei, iar apoi se selectează din bara de context, sau prin clic cu butonul drept al mouse-ului pe grafic, opţiunile dorite.

Implicit se folosesc coordonatele carteziene. Dacă se doreşte utilizarea altor coordonate, acestea trebuie specificate, prin introducerea în lista de opţiuni sub forma „coords = nume_coordonate”. O opţiune de forma „discont=true”, determină apelul comenzii „Discont” pentru determinarea punctelor de discontinuitate a funcţiei ce se reprezintă grafic.

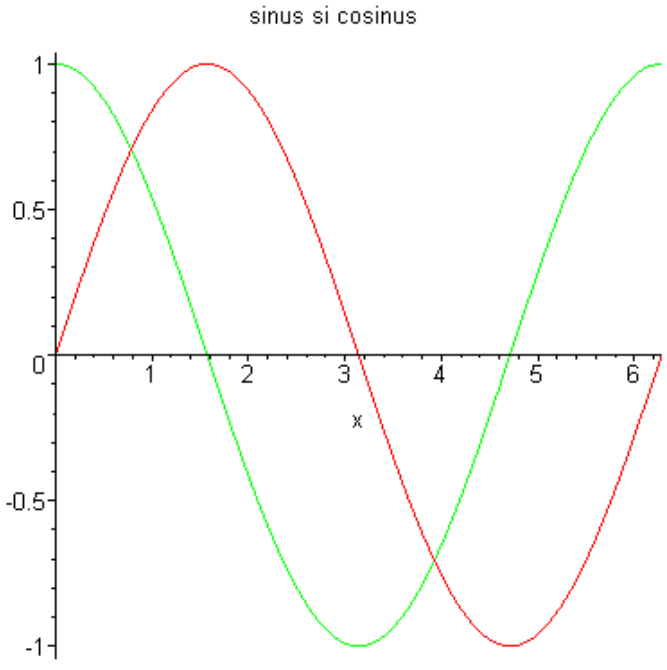
Exemple:

```
>plot(sin(x)*ln(x), x=Pi..8*Pi);
```

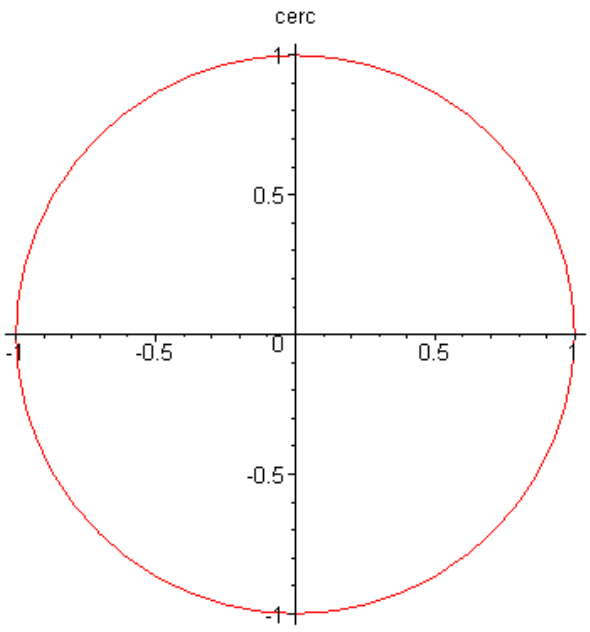


>

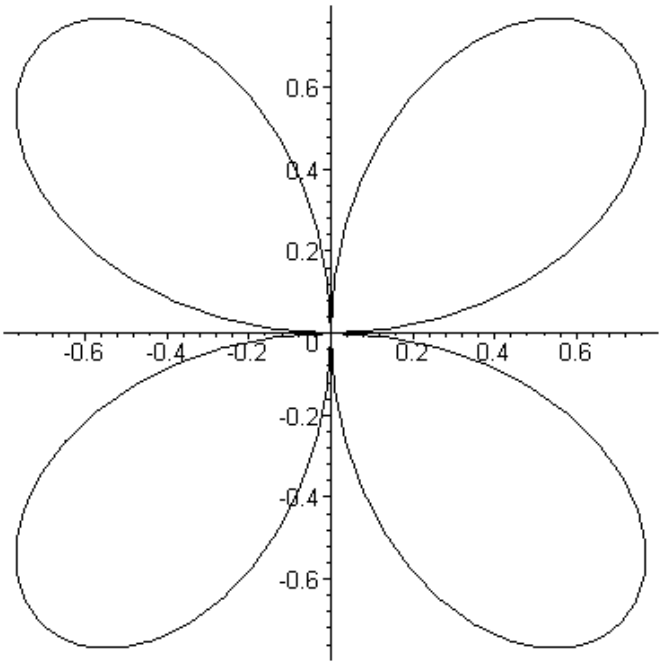
```
plot([sin(x),cos(x)],x=0..2*Pi,title=`sinus si cosinus`);
```



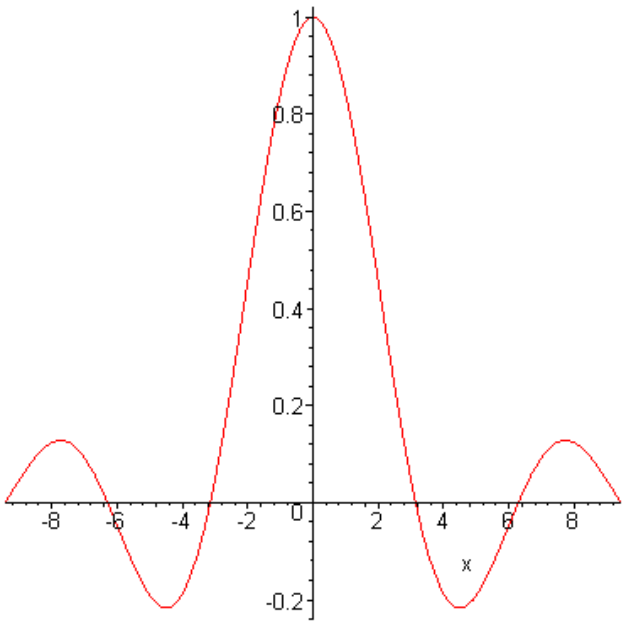
```
> plot([sin(t),cos(t),t=0..2*Pi],title=`cerc`);
```



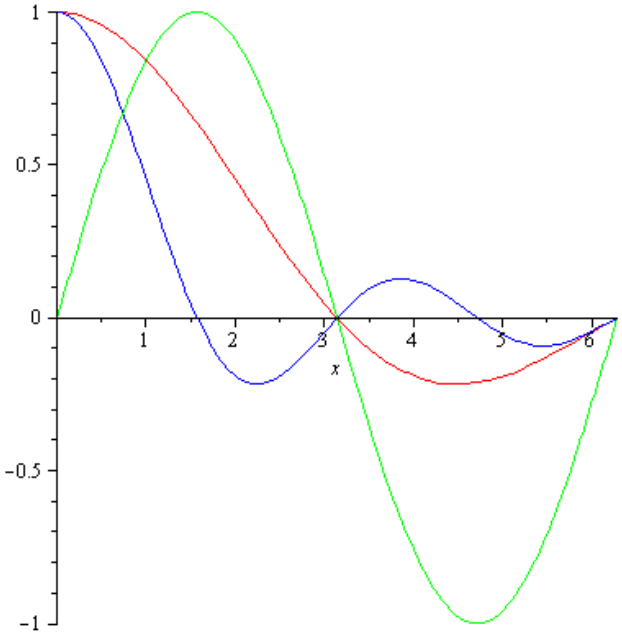

```
>
plot(sin(2*t),t=0..2*Pi,coords=polar, color=black);
```



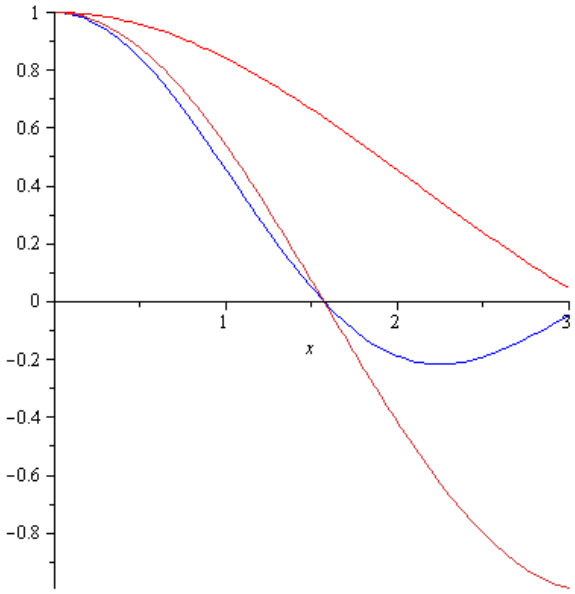

```
> plot(sin(x)/x, x=-3*Pi..3*Pi,discont=true);
```



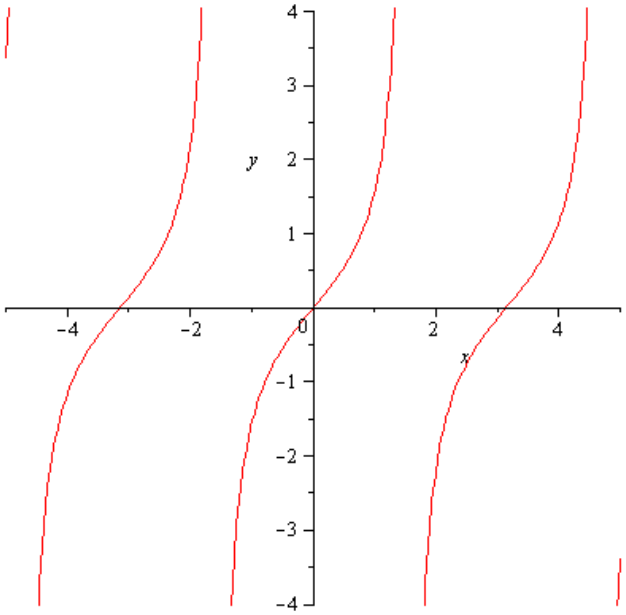

```
> f:=x->sin(x)/x:
> plot({f(x),f(2*x),sin(x)},x=0..2*Pi,color=[red,blue,green]);
```



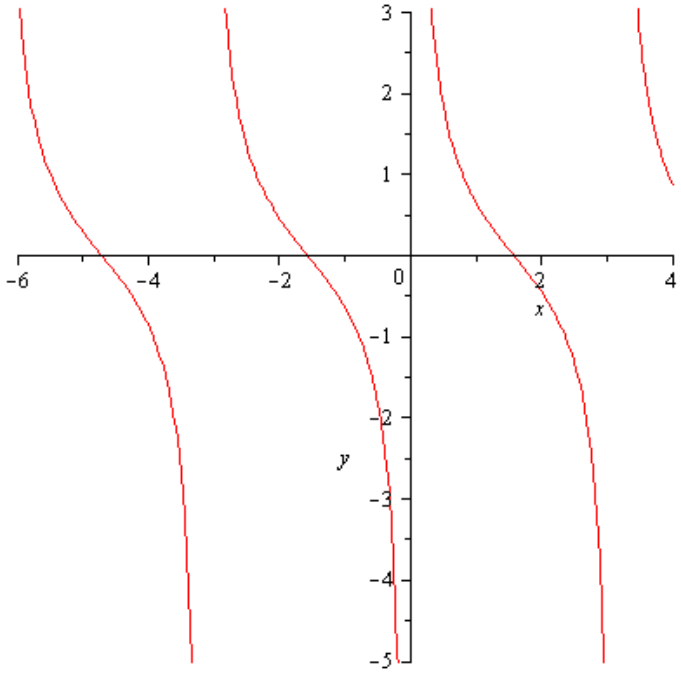

```
> plot({f(x),f(2*x),cos(x)},x=0..3,color=[red,blue,orange]);
```



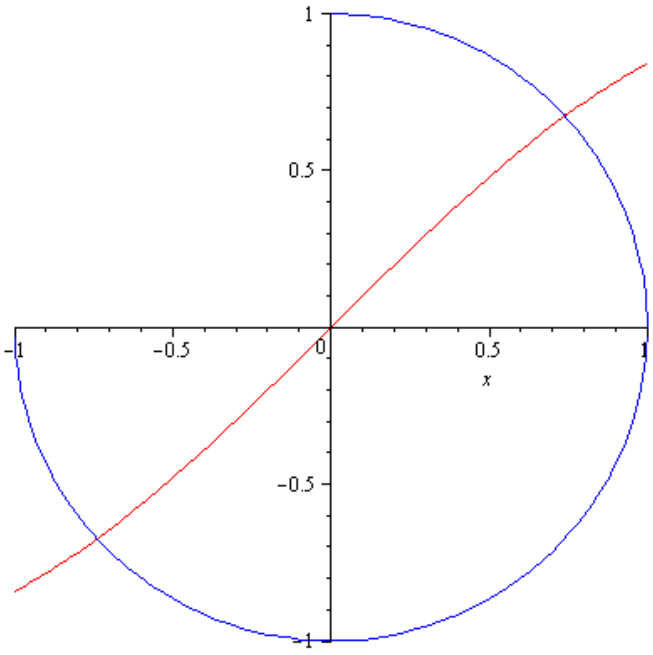

```
> plot(tan(x),x=-5..5,y=-4..4,discont=true);
```




```
> plot(cot(x),x=-6..4,y=-5..3,discont=true);
```



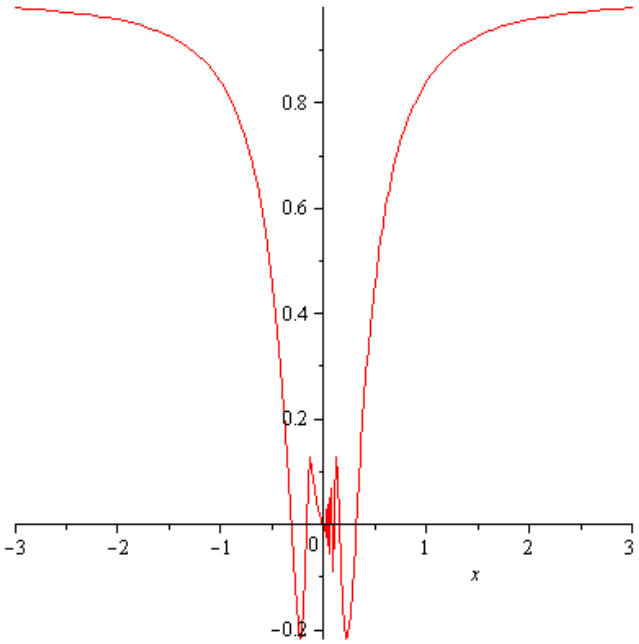

```
> plot({[sin(t),cos(t),t=0..3/2*Pi],sin(x)},x=-1..1,color=[red,blue]);
```




```
> f:=x->x*sin(1/x);
```

$$f := x \to x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

```
> plot(f(x),x=-3..3);
```



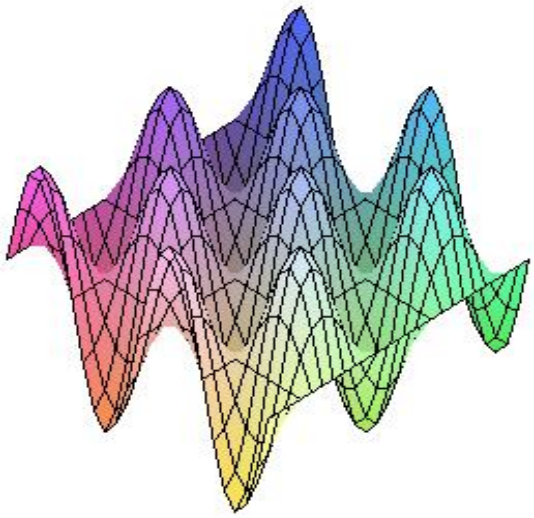
Comanda „plot3d” este destinată reprezentării grafice a suprafeţelor în spaţiu tridimensional. Altfel spus, reprezentarea grafică a funcţiilor de două variabile se face prin comanda **plot3d**. Ca şi în cazul comenzii **plot** reprezentarea grafică se face conform cu opţiunile indicate în comandă sau în raport cu cele implicite. Unele din aceste opţiuni se pot stabili şi din meniul contextual. Comanda **plot3d** poate fi folosită sub mai multe forme.

Prezentăm de fiecare dată numărul minim de parametri ceruţi.

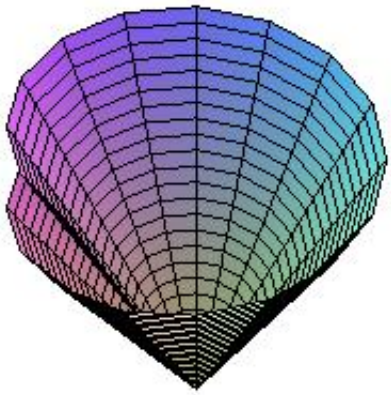
Notaţie MAPLE	**Suprafaţa/Suprafeţele reprezentate**
plot3d(f(x,y),x = a..b,y=c..d)	z = f(x,y), $(x,y)\in[a,b]\cdot[c,d]$
plot({f(x,y),g(x,y)},x = a..b,y=c..d)	z = f(x,y),z=g(x,y) $(x,y)\in[a,b]\cdot[c,d]$
plot([f(u,v),g(u,v),h(u,v)],u=a..b,v=c..d)	$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h\,(u,v) \end{cases}$

Exemple:

```
> plot3d(cos(x)*sin(y),x=-2*Pi..2*Pi,y=-2*Pi..2*Pi);
```



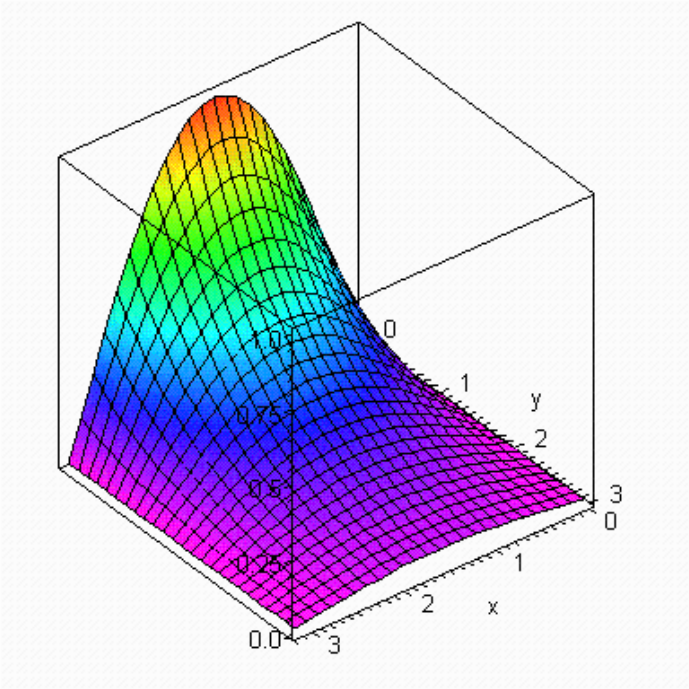
```
> plot3d([v*cos(u),v*sin(u),v*ln(u)],u=Pi..4*Pi,v=0..1);
```



```
> g:=(x,y)->sin(x)*exp(-y);
```

$$g := (x, y) \rightarrow \sin(x)\ e^{-y}$$

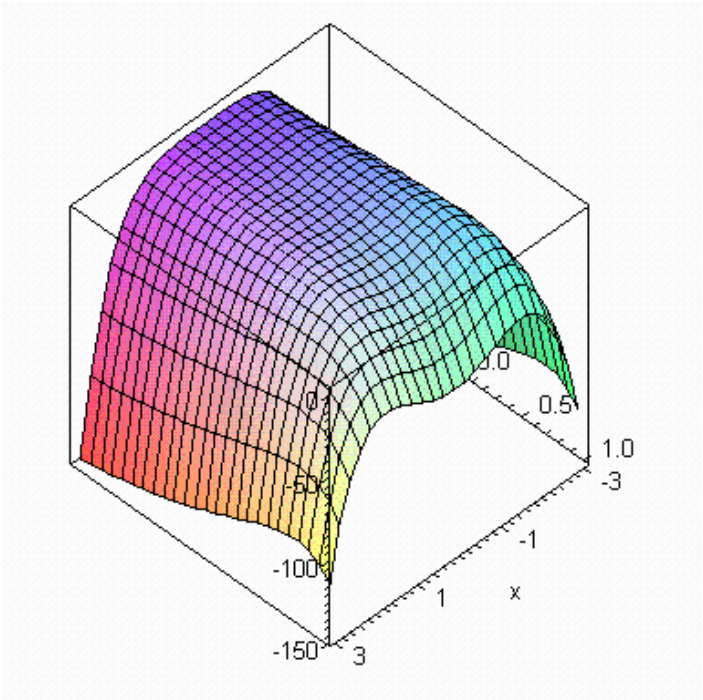
```
> plot3d(g(x,y),x=0..Pi,y=0..3,axes=boxed);
```




```
> z:=(x,y)->4*x^2*exp(y)-2*x^4-exp(4*y);
```

$$z := (x, y) \to 4\,x^2\,e^{y} - 2\,x^4 - e^{4\,y}$$

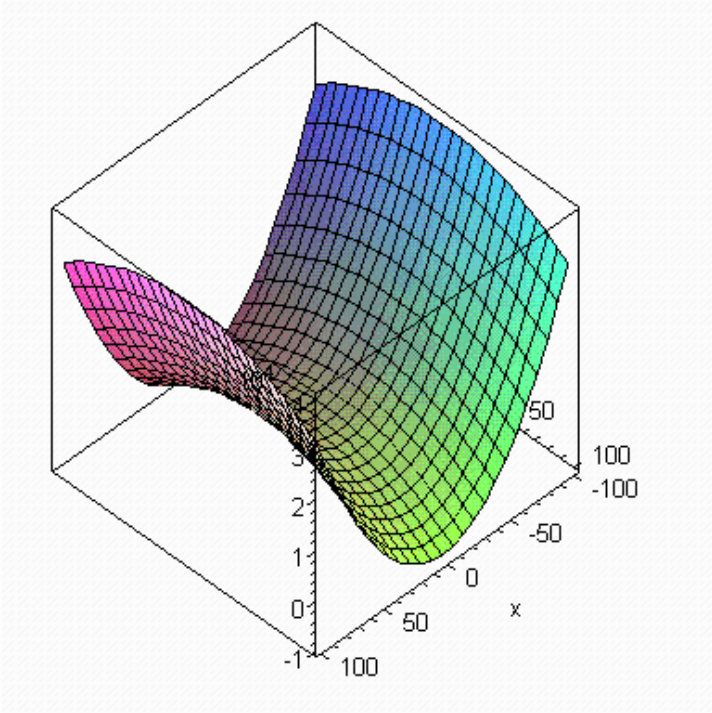
```
> plot3d(z(x,y),x=-3..3,y=-1..1);
```




```
> z:=(x,y)->4*x^2-y^2;
```

$$z := (x, y) \to 4\,x^2 - y^2$$

```
> plot3d(z(x,y),x=-100..100,y=-100..100);
```



Comenzile **animate** şi **animate3d** sunt destinate animaţiei în plan şi spaţiu. Comanda:

animate3d(f(x,y,t),x=a..b,y=c..d,t=t1..t2)

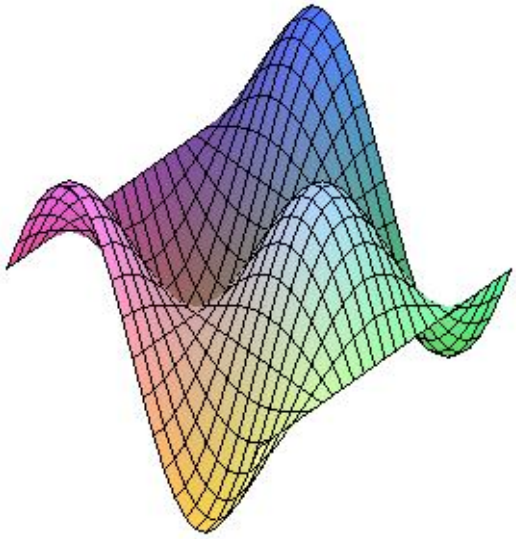
creează animaţie cu ajutorul cadrelor obţinute prin reprezentarea grafică a suprafeţelor

zt = f(x,y,t), (x,y) din [a,b]×[c,d]

pentru valori ale lui t în intervalul [t1,t2]. Numărul de cadre poate fi stabilit cu ajutorul opţiunii **frames** (implicit sunt 8). În cazul în care dorim să vizualizăm dependenţa unei funcţii faţă de un parametru este utilizată comanda **animate** (se dă clic dreapta pe imagine se selectează *Animation* si apoi *Play*).

Exemplu:

```
> animate3d(cos(x)*sin(t*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,t=1..2);
```



6. Structuri de date

Listele (**lists**) în MAPLE sunt şiruri ordonate de expresii, separate între ele prin virgulă şi incluse între paranteze drepte []. Ordinea expresiilor este data de poziţia în care apar în listă. Dacă L este o lista L[i] desemnează elementul de pe poziţia i. Lista vidă este desemnată prin [].

Se pot efectua următoarele operaţii cu liste:

- **extragerea** din lista L a elementelor de la poziţia i până la poziţia j: L(i..j) sau op(i..j,L).;
- **adăugarea** unui element x la lista L: [x,op(L)] (adaugă elementul pe prima poziţie), [op(L),x] (adaugă elementul pe ultima poziţie);
- **modificarea** elementului de pe poziţia i: subsop(i=x,L) sau L[i]:=x;
- **eliminarea** elementului de pe poziţia i: subsop(i=NULL,L);

Exemple:

```
> L:=[1,2,3,4];
```

$$L := [1, 2, 3, 4]$$

```
> L[2];
```

$$2$$

```
> L[2]:=5;
```

$$L_2 := 5$$

```
> L;
```

$$[1, 5, 3, 4]$$

```
> L[2..4];
```

$$[5, 3, 4]$$

```
> op(2..4,L);
```

```
                                  5, 3, 4
> L1:=[6,op(L)];
                          L1 := [6, 1, 5, 3, 4]
> L2:=[op(L),6];
                          L2 := [1, 5, 3, 4, 6]
> subsop(4=7,L2);
                             [1, 5, 3, 7, 6]
> L2;
                             [1, 5, 3, 4, 6]
> subsop(4=NULL,L2);
                                [1, 5, 3, 6]

> L2;
                             [1, 5, 3, 4, 6]
```

Mulţimile (**sets**) în MAPLE sunt şiruri neordonate de expresii, separate între ele prin virgulă şi incluse între acolade {}. Duplicatele sunt eliminate. ***Mulţimea vidă*** este desemnată prin **{}**. Se pot efectua următoarele operaţii cu mulţimi:

- reuniune: operatorul union
- intersecţie: operatorul intersect
- diferenţă: operatorul minus

Exemple:

```
> M:={red, green, blue};
                          M := {red, blue, green}
> S:={1,2,1,3,2};
                             S := {1, 2, 3}
> M union S;
                       {1, 2, 3, red, blue, green}
> S minus {2};
                                {1, 3}
> S intersect {2,3,7};
                                {2, 3}
```

Tablourile (**tables**) în MAPLE sunt structuri de date ale căror membri sunt indexaţi.

Exemplu:

```
> t:=table([(culoare1)=red,(culoare2)=green, (culoare3)=blue]);

          t := table([culoare1 = red, culoare3 = blue, culoare2 = green])
> t[culoare2];
                                 green
```

Un tablou cu zero sau mai multe dimensiuni, pentru care fiecare dimensiune are domeniu întreg se numeşte în MAPLE **array**. Pentru a crea un „array” se poate apela funcţia „array” sub forma:

array(domeniile de indexare, lista de iniţializare)

Parametrii sunt opţionali şi pot apărea în orice ordine.

Exemple:

```
> v := array(1..4);
```

$$v := \text{array}(1 .. 4, [\ ])$$

```
> v[2];
```

$$v_2$$

```
> v[2]:=3;
```

$$v_2 := 3$$

```
> evalm(v);
```

$$[v_1, 3, v_3, v_4]$$

```
> A := array(1..2,1..2);
```

$$A := \text{array}(1 .. 2, 1 .. 2, [\ ])$$

```
> A[1,2] := x;
```

$$A_{1,2} := x$$

```
> A[1,1];
```

$$A_{1,1}$$

```
> A[1,2];
```

$$x$$

```
> evalm(A);
```

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & x \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

```
> A := array(1..2,1..2, [ [1,x], [x,x^2] ] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$$

Matricele (**matrix**) în MAPLE sunt tablouri bidimensionale cu indexare de la 1. Cu alte cuvinte un apel matrix(m,n, lista de iniţializare) este echivalent cu array(1..m,1..n, lista de iniţializare).

Exemple:

```
> M:=matrix(3,2,[[1,2],[3,4],[5,6]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> M[1,2];
```

$$2$$

Pachetul **linalg** ce trebuie "încărcat" la început în fișerul de lucru, conține comenzi pentru operațiile cu matrice. In cazul operatiilor cu vectori trebuie încarcat tot pachetul de algebra liniară **linalg**.

Exercițiu: Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculați: $2A - BC, B^{-1}$.

```
> A:=matrix([[1,2,-1],[0,1,0],[3,-1,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix([[1,2,3],[1,1,2],[2,1,1]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> C:=matrix([[2,1,1],[0,1,-1],[4,2,2]]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A1:=evalm(2*A);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> BC:=evalm(B&*C);
```

$$BC := \begin{bmatrix} 14 & 9 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(A1-BC);
```

$$\begin{bmatrix} -12 & -5 & -7 \\ -10 & -4 & -4 \\ -2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(B^(-1));
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Prin câteva exemple oferite în cadrul acestei lucrări, atât elevul/studentul cât şi profesorul conştientizează într-un mod plăcut şi captivant faptul că Maple oferă o soluţie completă şi unitară pentru rezolvarea diferitelor probleme matematice, fiind un program flexibil, complex, uşor de învăţat şi uşor de utilizat. În ultimii ani, Maple este folosit tot mai des în predarea matematicii la diverse universităţi din România dar şi din alte ţări. După ce elevul a rezolvat exerciţiul/problema pe hârtie, acesta poate face verificarea pe calculator. Utilitatea programului este remarcabilă atât pentru materia predată în mediul preuniversitar, cât şi în cel universitar prin rezolvarea diferitelor fenomene matematice, probleme de Matematică superioară, Sisteme dinamice, Ecuaţii diferenţiale, Analiză matematică, Analiză numeric, Calcul vectorial, Modelări matematice etc. Matematica nu este însă unicul domeniu pentru care MAPLE oferă suport.

Maple se dovedeşte a fi un bun auxiliar al instruirii directe din clasă, care reuşeşte să stimuleze interesul elevilor/studenţilor antrenaţi într-o nouă abordare a studiului matematicii în clasă/sala de curs dar şi a lucrului individual de acasă.

BIBLIOGRAFIE:

[1] D. Betounes, *Differential Equations. Theory and Applications with Maple*, Editura Springer, New York, 2000.
[2] M.-A. Şerban, *Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale*, Editura Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2009.
[3] R. Precup, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2011.
[4] www.maplesoft.com