ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

Profesor Florea Adrian
Şcoala Gimnazială „Avram Iancu"
București

În matematică, *propoziţia* este un enunţ despre care ştim cu certitudine că este adevărat sau fals. Valoarea de adevăr a unei propoziţii o vom nota cu (A) dacă propoziţia este adevărată şi cu (F) dacă propoziţia exprimă un neadevăr, adică este falsă. Valoarea de adevăr a unei propoziţii este exclusiv (A) sau (F).
O propoziţie se poate exprima prin cuvinte sau prin simboluri matematice (care apar în scris, dar care se citesc şi ele prin cuvinte ale limbajului folosit).
Enunţuri:

1) "2|8", citim "numărul 2 divide numărul 8"
2) "O oră are 60 de minute"
3) "2+3<7"
4) "8 – 2>5+4"
5) "2x=6"
6) "x<0"
7) "Nu alerga!"

Dintre enunţurile de mai sus doar primele patru sunt propoziţii, primele trei fiind adevărate, iar a patra, falsă. Enunţurile (5) şi (6) nu sunt propoziţii pentru că valoarea lor de adevăr depinde de o variabilă (ele sunt *predicate*). Enunţul (5) devine o propoziţie adevărată dacă x=3 şi propoziţie falsă pentru orice altă valoare a lui x. Enunţul (7) nu este o propoziţie pentru că nu are nici o valoare de adevăr, fiind de fapt un ordin.

<u>Negaţia propoziţiilor</u>

Negaţia unei propoziţii *p*, este propoziţia "┐*p"* (non p), propoziţie care este adevărată dacă *p* este falsă şi este falsă dacă *p* este adevărată.
<u>Exemple:</u> 1) Fie *p* propoziţia "2+3=5". Negaţia acestei propoziţii (┐*p*) este "2+3≠5" (doi plus trei nu este egal cu 5).
2) *p*: "după joi urmează vineri"; ┐*p:* " după joi nu urmează vineri".
3) *p:* " 5·6=36 "; ┐*p*: " 5·6≠36 ".

Disjuncţia propoziţiilor

Disjuncţia propoziţiilor *p, q* este propoziţia "*p* sau *q*" (notată $p \vee q$), propoziţie care este adevărată numai atunci când cel puţin una dintre propoziţiile *p, q* este adevărată.

p	q	$p \vee q$
A	A	A
A	F	A
F	A	A
F	F	F

Să considerăm propoziţia: "$2 \leq 3$". Această propoziţie este o disjuncţie a propoziţiilor *p:* "$2<3$", *q*: "$2=3$". Pentru că propoziţia *p*: "$2<3$" este adevărată, rezultă că şi propoziţia $p \vee q$: "$2 \leq 3$" este adevărată.

În general, propoziţiile formate din mai multe propoziţii legate între ele prin cuvântul " sau ", sunt adevărate dacă cel puţin una din propoziţiile componente este adevărată.

La operaţiile cu mulţimi $x \in A \cup B$ dacă $x \in A$ sau $x \in B$, adică elementul x aparţine reuniunii mulţimilor, dacă el aparţine cel puţin uneia dintre acele mulţimi.

Conjuncţia propoziţiilor

Conjuncţia propoziţiilor *p* şi *q* este propoziţia $p \wedge q$ (se citeşte p şi q) care este adevărată numai dacă ambele propoziţii *p, q* sunt adevărate şi falsă în celelalte cazuri.

p	q	$p \wedge q$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

La propoziţiile cu mulţimi: $x \in A \cap B$ dacă $x \in A$ şi $x \in B$.

Propoziţia *p* este "$x \in A$", iar propoziţia *q* este "$x \in B$". Propoziţia "$x \in A \cap B$" este adevărată, adică elementul x aparţine intersecţiei celor două mulţimi, dacă elementul x aparţine fiecăreia dintre mulţimile date (adică ambele propoziţii *p, q* sunt adevărate).

Implicaţia propoziţiilor

Să considerăm două propoziţii *p, q*. Dacă valoarea de adevăr a propoziţiei *q* depinde de valoarea de adevăr a propoziţiei *p* în sensul raţionamentului deductiv, spunem că *propoziţia p implică propoziţia q* (scriem $p \to q$).

p	q	$p \to q$
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

Exemplu:
p: " $2 < 3$ ", prin înmulţirea ambilor termeni cu 2, obţinem propoziţia q: " $4 < 6$ ", $p \to q$ (A).

Dacă din propoziţia p se deduce cu necesitate propoziţia q, spunem că din propoziţia p rezultă propoziţia q (şi scriem $p \Rightarrow q$).

Propoziţia p se numeşte *ipoteza* implicaţiei, iar propoziţia q se numeşte *concluzia* implicaţiei.

Echivalenţa propoziţiilor

Cu propoziţiile p, q formăm propoziţia compusă $(p \to q) \wedge (q \to p)$ (scriem $p \Leftrightarrow q$). Această propoziţie compusă $p \Leftrightarrow q$ (citim: " p dacă şi numai dacă q ") este adevărată numai dacă propoziţiile p, q sunt ambele adevărate sau ambele false.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	A

Predicate

În matematică se folosesc foarte des enunţuri în care apar una sau mai multe variabile.

Predicatul este un enunţ care depinde de una sau mai multe variabile şi care pentru orice valori date variabilelor se obţin propoziţii care sunt adevărate sau false.

Predicatele se mai numesc propoziţii cu variabile. Un enunţ care depinde de variabila x îl notăm " $p(x)$ " (propoziţie cu o variabilă),
" $p(x,y)$ " este o propoziţie cu două variabile etc.

Când se enunţă un predicat, trebuie să se indice şi mulţimea în care variabilele iau valori.

Exemple:
1) $p(x)$: " $x+2=5$ ", unde x este număr întreg.
Pentru $x=3$ se obţine propoziţia " $3+2=5$ " (A).
Pentru orice alte valori ale lui x, se obţin propoziţii false.
2) $p(x,y)$: " $x+y=6$ ", x şi y numere naturale.

Cuantificatori

Să considerăm un predicat $p(x)$ şi o mulţime de valori M. Se poate enunţa propoziţia: “există $x \in M$ astfel încât $p(x)$” care se notează $(\exists x)\ p(x)$.

Această propoziţie este adevărată dacă există cel puţin un $x_1 \in M$ pentru care propoziţia $p(x_1)$ este adevărată şi este falsă dacă nu există nici un x_1 din M pentru care $p(x_1)$ să fie adevărată.

“∃” (există) se numeşte ***cuantificator existenţial***.

Exemplu: Să considerăm predicatul $p(x)$: ”$x - 2 < 0$ ”, unde x este număr natural. Propoziţia “$(\exists x)\ (x - 2 < 0)$” este adevărată pentru că există numărul natural 1 pentru care propoziţia $p(1)$: ”$1 - 2 < 0$ ” este adedvărată.

Cuantificatorul universal (∀)

Cu un predicat $p(x)$ putem formula enunţul: “oricare ar fi x din mulţimea M, are loc $p(x)$”, care se notează $(\forall x)\ p(x)$.

Acest enunţ este o propoziţie adevărată dacă pentru orice element $a \in M$, $p(a)$ este adevărată şi este falsă atunci când există cel puţin un element a din M pentru care $p(a)$ este falsă.

Exemple: 1) Considerăm predicatul $p(x)$: ”$x+5>0$”, unde x este număr întreg.

Propoziţia “$(\forall x)\ (x+5>0)$” este falsă deoarece există, de exemplu, numărul -6 pentru care propoziţia $p(-6)$: ” $-6 + 5 > 0$ ” este falsă. 2) Fie predicatul $p(x)$: “$x^2+1>0$”, unde x este număr întreg. Propoziţia “$(\forall x)\ (x^2+1>0)$” este adevărată.

Echivalenţa predicatelor (⇔)

Despre două predicate $p(x)$ şi $q(x)$ se spune că sunt echivalente şi scriem $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, dacă pentru orice valoare x_1 a variabilei, propoziţiile $p(x_1)$ şi $q(x_1)$ au aceeaşi valoare de adevăr.

Exemplu: Fie predicatele $p(x)$: “$2x-1=x+2$” şi $q(x)$: “$2x-x=2+1$” $x \in \mathbf{R}$. $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ pentru că $(\forall x_1) \in \mathbf{R}$, propoziţiile $p(x_1)$ şi $q(x_1)$ au aceeaşi valoare de adevăr. Cele două propoziţii sunt adevărate pentru $x = 3$ şi sunt ambele false pentru orice alte valori ale lui x_1.