

ROLUL DERIVATEI A DOUA ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

Prof. Pop Adela Terezia,
Colegiul Tehnic „Aurel Vlaicu”, Baia Mare

Clasa: 12

Obiectul: Matematica-Analiză matematică

Subiectul lecției: Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

Tipul lecției: Lecție de dobândire de noi cunoștințe.

Competențe generale:

1. Caracterizarea unor funcții utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare.
2. Interpretarea unor proprietăți ale funcțiilor cu ajutorul reprezentărilor grafice.
3. Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme și modelarea unor procese.
4. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor derivabilitate, tabel de variație a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții.
5. Studiarea unor funcții din punct de vedere cantitativ și calitativ utilizând diverse procedee: majorări, minorări pe un interval dat, proprietățile algebrice și de ordine ale mulțimii numerelor reale în studiul calitativ local, aproximarea unor funcții mai simple cunoscute.
6. Utilizarea reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți.
7. Explorarea unor proprietăți cu caracter local și/sau global utilizând continuitatea și derivabilitatea.

Competențe specifice:

1. Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme.
2. Determinarea intervalelor de convexitate și concavitate a funcțiilor.
3. Determinarea punctelor de inflexiune.

Strategia didactică: activ-participativă.

- **Metode și procedee didactice:** conversația euristică, exercițiul, demonstrația, munca independentă.
- **Material didactic utilizat:** manual clasa a-XI-a, fișe de lucru .
- **Tipuri de activități:** frontală și individuală.
- **Procedee de evaluare:** analiza răspunsurilor, observarea sistematică a atenției, verificarea cantitativă și calitativă a temei.

Scenariu didactic:

1.Moment organizatoric: -verificarea prezenței elevilor și notarea absențelor (dacă sunt) în catalog;

- asigurarea unei atmosfere adecvate pentru buna desfășurare a orei;

2.Captarea atenției: - verificarea temei elevilor prin sondaj folosind dialogul profesor-elev; elev-elev, prin confruntarea rezultatelor (în cazul în care apar diferențe mari la rezultat, se rezolvă exercițiile la tablă).

3.Informarea elevilor asupra lecției: Se anunță și se scrie pe tablă titlul lecției:

Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

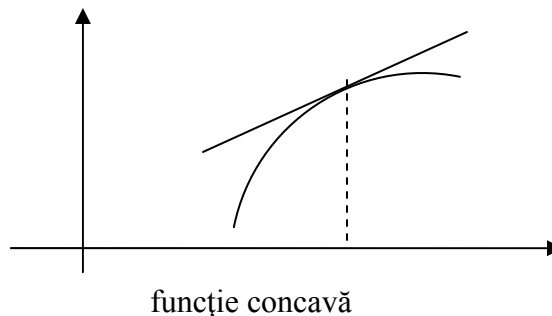
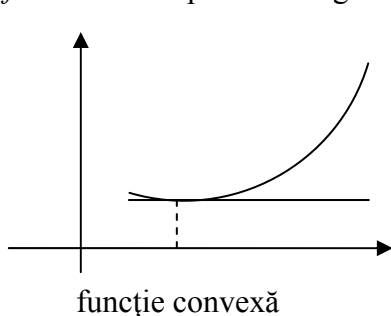
4.Verificarea cunoștințelor anterioare: Se propune elevilor o activitate interactivă frontală. Profesorul pune întrebări elevilor, urmărește completarea răspunsurilor primite și reținerea noțiunilor fundamentale însușite anterior de către elevi și necesare în rezolvarea exercițiilor.

5. Prezentarea de material nou

1. Determinarea intervalelor de convexitate și concavitate

Definiție: Fie $f : I \rightarrow R$, o funcție derivabilă pe intervalul I .

- a) Funcția f se numește convexă pe intervalul I , dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f se află sub acest grafic.
 b) Funcția f se numește concavă pe intervalul I , dacă tangenta în oricare punct al graficului funcției f se află deasupra acestui grafic.



Pentru studiul convexității și concavității unei funcții de două ori derivabilă, vom utiliza semnul derivatei a doua.

Teoremă: Fie $f : I \rightarrow R$, o funcție de două ori derivabilă pe intervalul I . Atunci:

- 1) Funcția f este convexă pe intervalul I dacă și numai dacă derivata a doua este pozitivă pe intervalul I .
- 2) Funcția f este concavă pe intervalul I dacă și numai dacă derivata a doua este negativă pe intervalul I .

Exemplul 1: Să se determine intervalele de convexitate și concavitate ale funcției:

$$f : R \rightarrow R, f(x) = x^3 - 12x$$

Rezolvare: Funcția f este de două ori derivabilă pe R

$$f'(x) = 3x^2 - 12, \text{ iar } f''(x) = 6x$$

Ecuția $f''(x) = 0$ are soluția $x=0$. Construim tabelul de semn pentru derivata a doua:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$			

Din tabel rezultă că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, 0)$ și este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.

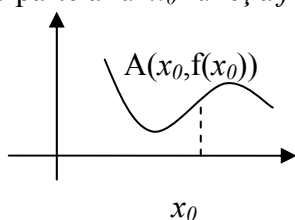
Stabilirea intervalelor de convexitate și concavitate a unei funcții $f : I \rightarrow R$

- I. Se calculează derivatele f' , respectiv f'' a funcției f .
- II. Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$.
- III. Se determină semnul funcției f'' pe intervalele pe care aceasta nu se anulează și se trec datele în tabel.
- IV. Se stabilesc intervalele de convexitate și concavitate în funcție de semnul derivatei f'' .

2. Determinarea punctelor de inflexiune

Definiție: Fie $f : [a, b] \rightarrow R$ și $x_0 \in (a, b)$.

Punctul $x_0 \in (a, b)$ se numește punct de inflexiune al funcției f , dacă f este continuă în x_0 și dacă într-o parte a lui x_0 funcția f este convexă, iar în cealaltă parte a lui x_0 funcția f este concavă.



Observație: Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow R$ este derivabilă de două ori în punctul de inflexiune $x_0 \in (a, b)$, atunci $f''(x_0) = 0$.

Pentru o funcție de două ori derivabilă $f : I \rightarrow R$, punctele de inflexiune sunt printre soluțiile ecuației $f''(x_0) = 0$. Determinarea acestora se face studiind semnul derivatei a doua.



Exemplul 2: Determinați punctele de inflexiune pentru următoarea funcție:

$$f : R \rightarrow R, f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

I. Calculăm $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ și $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

II. Rezolvăm ecuația $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

III. Studiem semnul funcției f''

x	$-\infty$	-1	1	∞
$-2x^2+2$	- - - - -	0	+ + 0	- - - - -
$(x^2+1)^2$	+ + + + +	+ + + + +	+ + + + +	+ + + + +
$f''(x)$	- - - - -	0	+ + 0	- - - - -
$f(x)$				

IV. Din tabel rezultă că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -1)$ și pe intervalul $(1, \infty)$ și este convexă pe intervalul $(-1, 1)$. Punctele $x = -1$ și $x = 1$ sunt puncte de inflexiune pentru funcția f .



Exemplul 3: Determinați punctele de inflexiune pentru următoarea funcție:

$$f : R \rightarrow R, f(x) = e^x(x^2 - 4x + 6)$$

I. Calculăm $f'(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$ și $f''(x) = e^x \cdot x^2$

II. Rezolvăm ecuația $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

III. Studiem semnul funcției f''

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	+ + + + +	+ + + + +	+ + + + +
x^2	+ + + + +	0	+ + + + +
$f''(x)$	+ + + + +	0	+ + + + +
$f(x)$			

IV. Din tabel rezultă că funcția f este convexă pe R . Funcția f nu are puncte de inflexiune deoarece rămâne convexă pe tot domeniul de definiție (derivata a doua nu își schimbă semnul).

6. Consolidarea cunoștințelor și asigurarea feed-back-ului: Fiecare elev va primi câte o fișă de lucru. Pe parcursul rezolvării exercițiilor, profesorul intervine cu întrebări, adresate atât elevilor de la tablă cât și celor din clasă, pentru a se clarifica demersul rezolvării.

7. Tema pentru acasă: Se vor propune spre rezolvare ca temă pentru acasă, exercițiile rămase nerezolvate din fișă de lucru.

8. Precieri: Se notează elevii care s-au evidențiat în timpul orei.