Construirea numerelor irationale de forma

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a_1^2+a_2^2},\ldots,\ \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2},\ a,\ a_1,\ldots,\ a_n\in N$$

Prof. Pirvulescu Eugenia
Scoala Gimnaziala Nr.1 Popesti
Oras Mihailesti, Jud. Giurgiu

Dupa ce in scoala lui Pitagora s-a demonstrat ca $\sqrt{2}$ si $\sqrt{5}$ sunt marimi irationale (incomensurabile fata de uinitate) , un alt matematician grec , Teodor din Cirene (sec. 5 i.e.n) , dovedeste si incomensurabilitatea fata de unitate a numerelor $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$,..., $\sqrt{17}$, folosind metode geometrice.

Teetet din Atena (414-368) , unul din elevii lui Toader face o clasificare a numerelor irationale si se ocupa de segmente incomensurabile de forma:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ Construirea numerelor n √n (..) irationale √n ($n\neq a^2$; $a\in$ N) , se poate face foarte usor folosind rigla si compasul ,

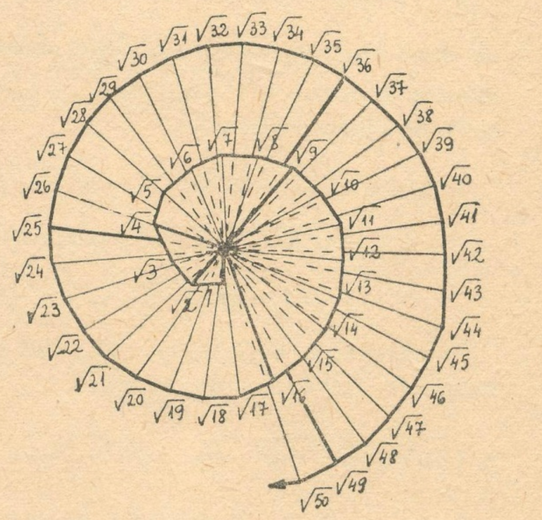

Fig. 56

folosind teorema lui Pitagora , teorema catetei sau teorema inaltimii . Adica una dintre relatiile din triunghiul dreptunghic ABC , in care AD⊥ BC : $BC^2 = AB^2+AC^2$, AB^2 = BC x BD ;
AC^2 = BC x DC ; AD^2= BD x DC

Folosind initial triunghiul dreptunghic ale carui catete sunt egale cu unitatea , se obtin succesiv numerele irationale :

$$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2},$$

$$\sqrt{3}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2},\ldots,\sqrt{n+1}=\sqrt{1^2+(\sqrt{n})^2}.$$

In figura 56 au fost construite in acest mod numerele irationale consecutive

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,..., $\sqrt{50}$.
Construirea numerelor irationale de forma:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2},\ \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ldots,\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}.$$

Se construieste initial triunghiul dreptunghic ale carui catete sunt a_1 si a_2 . Ipotenuza acestui triunghi va fi $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$. Construim apoi triunghiul dreptunghic de catete $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ si a_3. Ipotenuza acestui nou triunghi va fi $\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2+a_3^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, egala cu diagonala unui paralelipiped cu dimensiuni a_1, a_2 , a_3 . Folosind succesiv acest

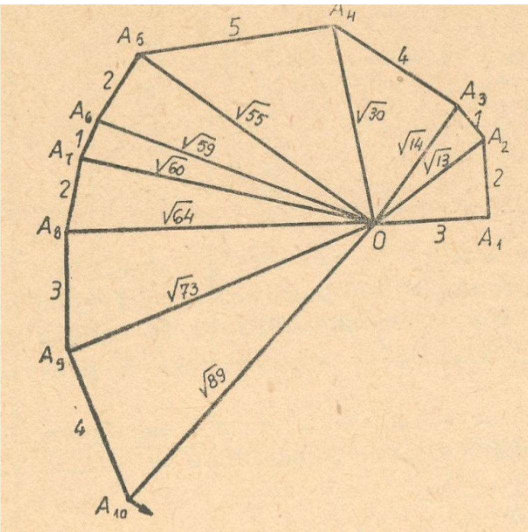

Fig. 57

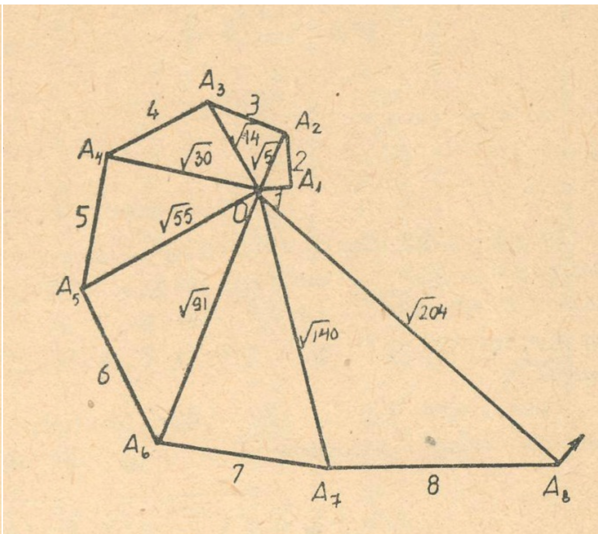

Fig. 58

procedeu se obtin oricate numere de forma $\sqrt{a_1^2+a_1^2+a_3^2+\dots+a_n^2}$. In figura 57 au fost calculate succesiv numerele irationale :

$OA_2 = \sqrt{9+2^2} = \sqrt{13}$; $OA_3 = \sqrt{13+1^2} = \sqrt{14}$; $OA_4 = \sqrt{14+16} = \sqrt{30}$;
$OA_5 = \sqrt{30} + \sqrt{25} = \sqrt{55}$; $OA_6 = \sqrt{59}$; $OA_7 = \sqrt{60}$; $OA_8 = \sqrt{64}$; $OA_9 = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$; $OA_{10} = \sqrt{73+4^2} = \sqrt{89}$;

In particular daca $a_1, a_2 \dots a_n$ sunt numere intregi consecutive , se obtin numerele irationale de forma :

$$\sqrt{1^1+2^2},\ \sqrt{1^2+2^2+3^2},\dots,\sqrt{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2} = \sqrt{\frac{1}{6}x(n+1)(2n+1)}$$ $n \in N$

Pentru n=2,3,....., 8 se obtin numere irationale din figura 58 .

$OA_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$; $OA_3 = \sqrt{1+4+3^2} = \sqrt{14}$; $OA_4 = \sqrt{1+4+3^2} + \sqrt{4^2} = \sqrt{30}$; $OA_5 = \sqrt{30+5^2} = \sqrt{55}$; $OA_6 = \sqrt{55+6^2} = \sqrt{91}$; $OA_7 = \sqrt{91+7^2} = \sqrt{140}$; $OA_8 = \sqrt{140+8^2} = \sqrt{204}$.

Un alt mod de a calcula numerele irationale de forma $\sqrt{n}$ cu rigla si compasul se bazeaza pe teorema inaltimii intr-un triunghi dreptunghic .
In figura 59 au fost construite semicercuri concentrice cu centrul 0 si cu razele egale 1,2,..., 6. Intersectia perpendicularelor pe raza OA in punctele de diviziune 1,2,...,6 cu sferturile de cerc de raze1,2,...,6 ne dau numerele irationale $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{35}$.

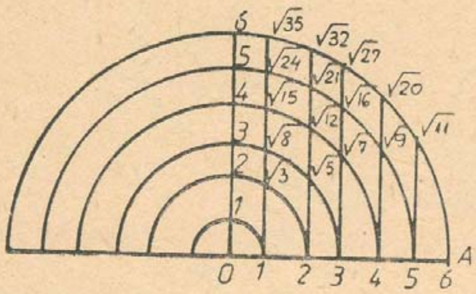

Fig. 59

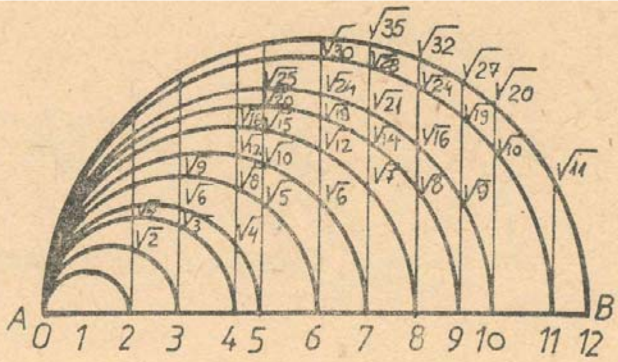

Fig. 60

In figura 60 au fost construite semicercuri de diametre 2,3,…12 . Intersectia perpendicularelor pe diametrul AB in punctele de diviziune 2,3,…,11cu semicercurile de diametre3,4,…,12 ne dau succesiv numere irationale $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... $\sqrt{11}$; $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{20}$; $\sqrt{9}$, $\sqrt{12}$,...., $\sqrt{27}$; $\sqrt{16}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{32}$ $\sqrt{25}$, $\sqrt{30}$ $\sqrt{35}$.

Bibliografie

1. Mihu Cerchez, Pitagora, Editura Academiei, 1986
2.George Andonie , Varla Mathematica . Editura Albatros , Bucuresti , 1997 .
3.Anton Dumitru , Philosophia mirabilis. Ed. Enciclopedica Romana, Bucuresti, 1974.
4. Elisa Loomis . The Pytagorean Proposition . Ed . Edward Brother ; Michigan, 1940.