APLICAȚII ALE INEGALITĂȚII LUI JENSEN

PROF. SEBASTIAN ILINCA [1]

Inegalitatea lui Jensen constituie o sursă pentru demonstrarea multor inegalități . Enunțul ei este următorul :

Fie f o funcţie convexă pe un interval I inclus în R, fie $x_1, x_2, ..., x_n \in I$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ numere reale nenegative astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Atunci

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$ (cu sens schimbat pentru funcţia concavă).

Vom prezenta câteva aplicații imediate ale acestei proprietăți.

1) Arătaţi că pentru orice $x, y > 0$ avem: $\ln\frac{x+y}{2} \leq \frac{x}{x+y}\ln x + \frac{y}{x+y}\ln y$.

Soluţie: Fie $f:(0,+\infty) \to R$, $f(x) = x\ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$,deci funcţia este convexă. Cu inegalitatea lui Jensen avem:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2} \leq \frac{x\ln x + y\ln y}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{x+y}{2} \leq \frac{x}{x+y}\ln x + \frac{y}{x+y}\ln y.$$

2) Arătaţi că $\sqrt[5]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[5]{3-\sqrt[3]{3}} \leq 2\sqrt[5]{3}$.

Soluţie: Aplicăm teorema lui Jensen funcţiei $f:(0,+\infty) \to R$, $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

Calculând obținem $f''(x) = -\frac{4}{25}\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}} < 0 \Rightarrow$ funcţia este concavă

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Luăm $x_1 = 3+\sqrt[3]{3}$, $x_2 = 3-\sqrt[3]{3}$, $x_1 + x_2 = 6$

[1] Școala Gimnazială Pîrșcoveni , jud .OLT

$$f\left(\frac{6}{2}\right) \geq \frac{f\left(3+\sqrt[3]{3}\right)+f\left(3-\sqrt[3]{3}\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[5]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[5]{3-\sqrt[3]{3}}}{2} \leq \sqrt[3]{5}$$, inegalitatea ce trebuia demonstrată.

3) Pentru orice $a,b,c \in R_+$ arătaţi că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Soluţie: Cu substituţiile $x=\frac{a}{b+c}$, $y=\frac{b}{a+c}$, $z=\frac{c}{a+b}$ şi din concavitatea funcţiei

$f:(0,\ \infty) \to R,\ f(t)=\frac{t}{1+t}$ se obţine prin aplicarea in egalităţii lui Jensen:

$f(x)=\frac{a}{a+b+c}$, $f(x)+f(y)+f(z)=1$.Conform inegalităţii lui Jensen avem:

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}=\frac{1}{3},\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\sum_{ciclic} f(x) \leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

Dar, funcţia f este monoton crescătoare, deci , $\frac{1}{2} \leq \frac{x+y+z}{3} \Rightarrow x+y+z \geq \frac{3}{2}$.

4) Fie a,b,c numere pozitive. Arătaţi că:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Soluţie: Aplicăm Jensen funcţiei convexe $f(x)=\frac{1}{x},\ x>0$ şi avem:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \frac{2}{a+b}$$

Analog , $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{2}{b+c},\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \geq \frac{2}{c+a}$.

Prin adunarea celor trei inegalităţi se obţine rezultatul.

Următoarea inegalitate reprezintă inegalitatea lui Young demonstrată prin convexitate:

5) Fie $a,b,c>0$ şi $p,q>1$ numere reale astfel încât $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Atunci $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$,cu egalitate dacă şi numai dacă $a^p=b^q$.

Soluţie: Funcţia $f(x)=e^x$ este convexă pe intervalul $(0,\infty)$ şi punând $x=p\ln a,\ y=q\ln b$ prin aplicarea inegalităţii lui Jensen avem:

$$f\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\le\frac{f(x)}{p}+\frac{f(y)}{q}\Leftrightarrow e^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}}\le\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\Leftrightarrow e^{\ln a+\ln b}\le\frac{e^{\ln a}}{p}+\frac{e^{\ln b}}{q}\Leftrightarrow e^{\ln ab}\le\frac{e^{\ln a^p}}{p}+\frac{e^{\ln b^q}}{q}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

Cu egalitate dacă şi numai dacă $x=y$ adică $a^p=b^q$.

Bibliografie:

1. Radu E. , Șontea O. : Manual de analiză matematică (clasa a XI a+ a XII a), Editura Bic ALL , 2006
2. Rădulescu V, T.Rădulescu : Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis, Springer, New York, 2009

Școala Gimnazială Pîrșcoveni , jud .OLT