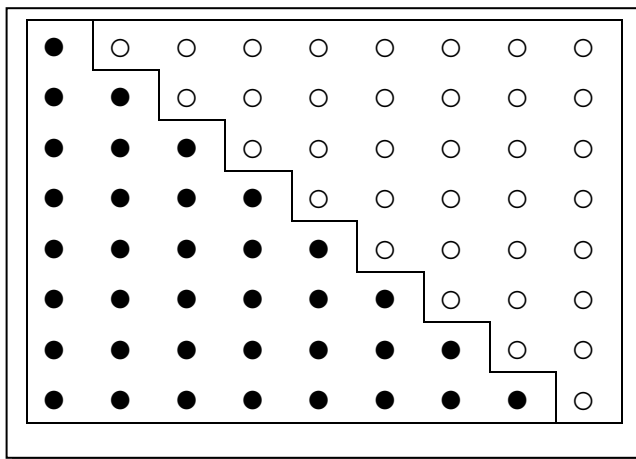


CALCULAREA UNOR SUME

Profesor Florea Adrian
Școala Gimnazială „Avram Iancu”
București

Cum se calculau unele sume în vechime

Matematicienii greci și chiar cei egipteni cunoșteau șirurile de numere. S-a pus problema calculării sumei termenilor unui șir. De exemplu se cerea să se afle suma $S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$, adică suma primelor 100 de numere naturale. Anticii, ingenioși, au găsit o soluție simplă. Pentru ușurința înțelegerii, să considerăm doar suma primelor 8 numere naturale și apoi vom extinde procedeul pentru oricâte numere. Ideea a fost să formeze cu termenii sumei un triunghi, care va fi completat cu un alt triunghi astfel încât să formeze un dreptunghi. În loc de numere folosim bile. Bilele negre reprezintă numerele pe care vrem să le adunăm, iar bilele albe sunt cele pe care le-am adăugat pentru a obține dreptunghiul.

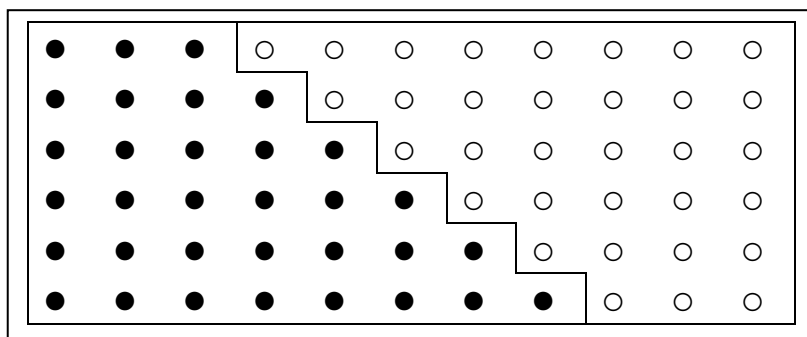


Se observă că avem 8 bile pe lățime și 9 bile pe lungime. În total $8 \cdot 9 = 72$ bile. Evident numărul bilelor negre va fi jumătate, adică $72:2 = 36$. Astfel am găsit că $S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. $S_8 = \frac{8 \cdot 9}{2}$. Pentru suma primelor 100 de numere naturale avem $S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

În acest caz dreptunghiul ar avea pe lățime 100 de bile iar pe lungime cu una mai mult, adică 101. Pentru un număr oarecare n de termeni, pe lățime am avea n bile iar pe lungime $n + 1$ bile și rezultă $S_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$. Pentru suma primelor 150 de numere naturale avem $n = 150$, $n + 1 = 151$,

$$\Rightarrow S_{150} = (150 \cdot 151):2 = 11325.$$

Ce facem când suma nu începe de la 1, ci de la un alt număr, să zicem de la 3 ? Procedăm asemănător, formând un dreptunghi.



Lângă primele trei bile negre adăugăm 8 bile albe, apoi lângă cele 4 bile negre adăugăm 7 bile albe și așa până la ultimul rând unde la cele 8 bile negre adăugăm 3 bile albe. Lățimea dreptunghiului are 6 bile, 6 fiind numărul termenilor, iar lungimea are 11 bile (3 + 8, suma dintre primul și ultimul termen). Suma bilelor negre va fi $S = \frac{6 \cdot (3+8)}{2} = 33$.

Dacă notăm cu p primul termen, cu u ultimul termen și cu n numărul termenilor, avem $S = \frac{n \cdot (p+u)}{2}$. Numărul termenilor este $n = (u - p) + 1$. Să aplicăm acest rezultat (această “formulă”) la următoarea sumă: aflați suma numerelor naturale consecutive de la 7 la 25. Primul termen este 7, deci $p = 7$, ultimul termen este 25, adică $u = 25$, iar numărul termenilor este $n=(25-7)+1=19$. Înlocuind obținem $S = \frac{19 \cdot (7+25)}{2} = 304$. Procedeu este deosebit de ingenios, scutindu-ne de a aduna “la rând” numerele.

Să mai luăm un exemplu:

Adunați toate numerele naturale consecutive de la 200 la 500. Dacă le-am aduna la rând, ne-ar trebui mult timp chiar dacă am folosi un calculator de buzunar. Să aplicăm însă “ formula” găsită: $p=200, u=500, n=(500 - 200)+1=301 \Rightarrow S = 301 \cdot (200 + 500):2 = 105350$.

Bibliografie

GARDNER, M., *Amuzamente matematice*, Editura științifică, București, 1968.

LITTLEWOOD, J.E., *Varietăți matematice*, Editura enciclopedică română, București, 1969.

IOSUB B. *Aritmetica distractivă*, Editura Tineretului, București, 1957

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii. Antichitatea, Evul mediu, Renașterea*, Editura enciclopedică română, București, 1974