METODE DE DEMONSTRARE A TEOREMEI LUI PITAGORA

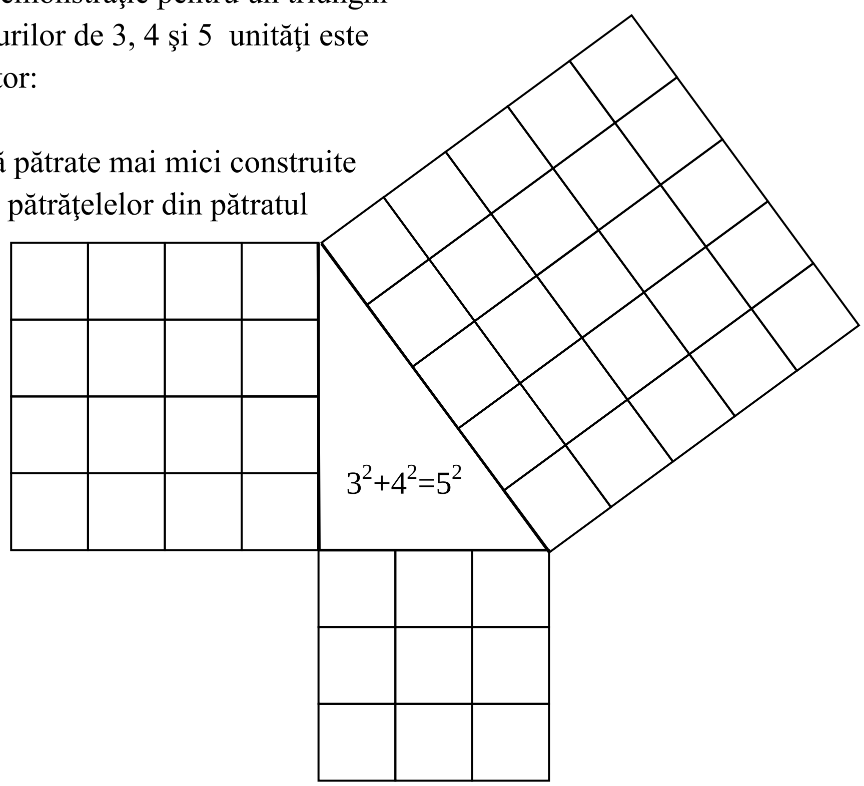
Profesor Florea Adrian
Școala Gimnazială ,,Avram Iancu"
București

Teorema lui Pitagora este una dintre cele mai cunoscute teoreme din geometrie. Ea exprimă o relaţie care există între lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. Teorema a fost cunoscută din cele mai vechi timpuri. Această relaţie, cu siguranţă era cunoscută de vechii egipteni, căci au aplicat-o în calculul dimensiunilor piramidelor şi se pare că relaţia era cunoscută şi de sumerieni şi de chinezi. Dar ca teoremă, în geometrie, demonstrată şi generalizată, teorema i se atribuie lui Pitagora.

În continuare dăm câteva demonstraţii ale acestei teoreme, printre care şi demonstraţia făcută de Pitagora. Din această demonstraţie cât şi din teorema lui Euclid vom remarca şi alte proprietăţi şi relaţii care există între figurile geometrice ce intervin în demonstraţie.

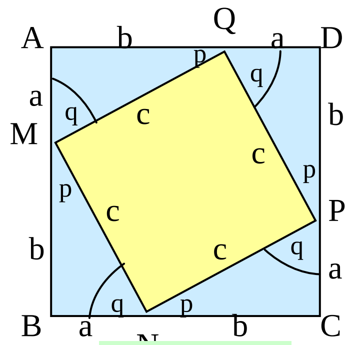
1. Cea mai simplă şi intuitivă demonstraţie pentru un triunghi dreptunghic cu lungimile laturilor de 3, 4 şi 5 unităţi este reprezentată în desenul următor:

Suma pătrăţelelor din cele două pătrate mai mici construite pe catete este egală cu numărul pătrăţelelor din pătratul mai mare construit pe ipotenuză!



2. O metodă simplă dar ingenioasă de demonstrare a teoremei lui Pitagora este următoarea:

Se consideră un pătrat ABCD. Pe laturile sale se iau punctele M, N, P, Q astfel încât AM=BN=CP=QD=a şi MB=NC=PD=QA=b. Deoarece unghiurile p şi q sunt complementare rezultă că patrulaterul MNPQ este pătrat a cărei latură o notăm cu "c".

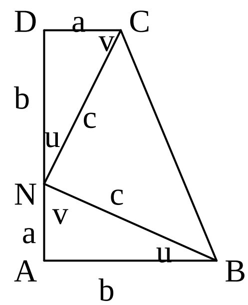


Aria pătratului ABCD o exprimăm ca suma ariilor pătratului MNPQ şi a celor patru triunghiuri dreptunghice: $S_{ABCD} = S_{MNPQ} + 4S_{MBN}$ $\Rightarrow (a + b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2} \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3. O altă demonstraţie a teoremei lui Pitagora a fost descoperită de generalul James Garfield, viitor preşedinte al Statelor Unite ale Americii. Demonstraţia a apărut în revista " New England Journal of Education", în anul 1875.

- Se consideră un trapez dreptunghic ABCD, cu baza mare de lungime *b*, baza mică de lungime *a* şi latura AD de lungime *b* + *a*. Pe latura AD se ia un punct N astfel încât AN = *a* şi DN = *b*.



$\Delta DNC \equiv \Delta ABN$ (triunghiuri dreptunghice cu catetele respectiv congruente).

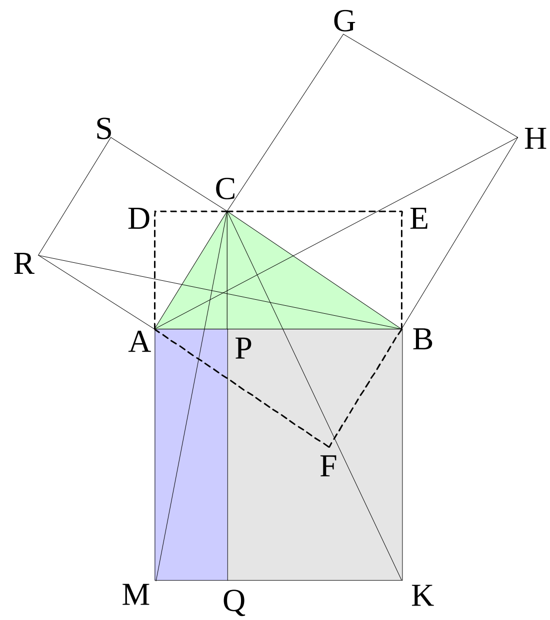
Rezultă că $\sphericalangle DNC \equiv \sphericalangle ABN$ (= u) şi $\sphericalangle DCN \equiv \sphericalangle ANB$ (=v).

Deoarece u + v = 90º $\Rightarrow$ m($\sphericalangle$BNC)=90º, adică ΔBNC este dreptunghic isoscel. Scriind că aria trapezului este egală cu suma ariilor celor trei triunghiuri, avem: $S_{ABCD}=S_{ABN}+S_{NDC}+S_{BNC}$, adică

$$\frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

4. Demonstraţia făcută de Pitagora.



Fie triunghiul ABC dreptunghic cu m(∢C)=90º, AB=c, BC=a, AC=b. Pe ipotenuză şi pe catete se construiesc în exteriorul triunghiului pătratele AMKB, ACSR şi BHGC. Ne propunem să arătăm că $S_{ABKM}=S_{ACSR}+S_{BHGC}$ şi apoi exprimând aceste arii în funcţie de a, b, c vom obţine relaţia din teoremă.

ΔARB≡ΔCAM:

[RA]≡[AC] (ca laturi ale pătratului ACSR)

[AB]≡[AM] (ca laturi ale pătratului AMKB)

∢RAB≡∢CAM (90º+m(∢BAC)).

Rezultă că $S_{RAB}=S_{CAM}$ (1). În ΔARB înălţimea BF dusă din B pe RA este egală cu AC. $S_{RAB}=\dfrac{RA\cdot BF}{2}$, $S_{ACSR}=RA\cdot AC, \Rightarrow S_{ACSR}=2\cdot S_{RAB}$ (2). În ΔCAM înălţimea CD dusă din C pe MA este egală cu AP. $S_{CAM}=\dfrac{AM\cdot CD}{2}$, $S_{APQM}=AM\cdot AP \Rightarrow S_{APQM}=2\cdot S_{CAM}$ (3). Din relaţiile (1), (2), (3) găsim că $S_{ACSR}=S_{APQM}$.

ΔABH≡ΔCBK:

[BH]≡[BC] (ca laturi ale pătratului CBHG)

[AB]≡[BK] (ca laturi ale pătratului ABKM)

∢ABH≡∢CBK (90º+m(∢(ABC)).

$\Rightarrow S_{ABH}=S_{CBK}$ (4). În ΔABH, înălţimea AF dusă din A pe BH este egală cu BC. $S_{ABH}=\dfrac{HB\cdot AF}{2}$,

$S_{BHGC}=HB\cdot BC \Rightarrow S_{BHGC}=2\cdot S_{ABH}$ (5). În ΔCBK, înălţimea CE dusă din C pe KB este egală cu PB.

$S_{CBK}=\dfrac{BK\cdot CE}{2}$, $S_{BKQP}=BK\cdot PB \Rightarrow S_{BKQP}=2\cdot S_{CBK}$ (6). Din relaţiile (4), (5), (6) găsim că

$S_{BHGC}=S_{BKQP}$. Dar $S_{ABKM}=S_{AMKP}+S_{BKQP}$.

Rezultă că $S_{ABKM}=S_{ACSR}+S_{BHGC}$, adică $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Bibliografie

GURAN E. *Matematică recreativă,* Editura Junimea, 1985

BOBANCU V., *Caleidoscop matematic,* Editura Albatros, București 1979

GARDNER, M., *Amuzamente matematice*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

LITTLEWOOD, J.E., *Varietăţi matematice,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1969.

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii*. *Antichitatea, Evul mediu, Renaşterea,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

VODA, V, Gh., *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.

IOSUB B. *Aritmetica distractivă,* Editura Tineretului, București, 1957