PATRULATERE ÎNSCRISE ÎN CERC, PATRULATERE INSCRIPTIBILE

Profesor Florea Adrian
Școala Gimnazială ,,Avram Iancu"
București

Să ne reamintim:
- Un patrulater este *înscris* într-un cerc, dacă vârfurile sale aparţin cercului (sunt conciclice)

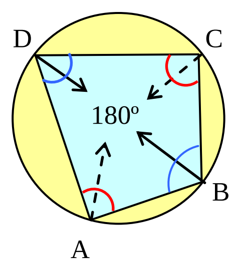
În acest caz, cercul este *circumscris* patrulaterului.

Teorema 1

Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci unghiurile opuse ale patrulaterului sunt suplementare.

$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C) = 180^o$

$m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle D) = 180^o$



Teorema 2

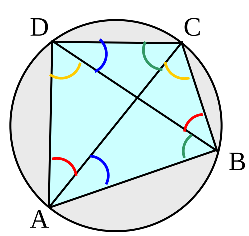
Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci diagonalele sale formează unghiuri congruente cu două laturi opuse ale patrulaterului.

$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$

$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DBC$

$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$

$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB$



- Un patrulater este *inscriptibil* dacă i se poate circumscrie un cerc.

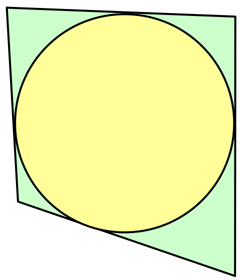
Reciproca teoremei 1

Un patrulater în care unghiurile opuse sunt suplementare, este patrulater inscriptibil.

Reciproca teoremei 2

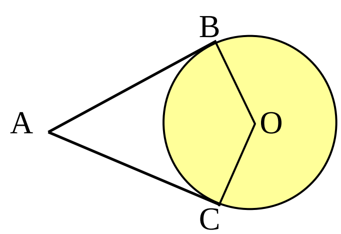
Dacă într-un patrulater unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sunt congruente, atunci patrulaterul este inscriptibil

* Un patrulater este circumscris unui cerc dacă laturile sale sunt tangente la cerc. În acest caz cercul este înscris în cerc.



Teorema 3

Tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente (ca segmente) [AB]≡[AC]

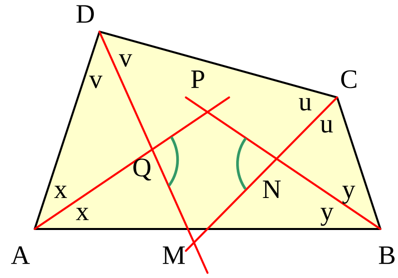


Teorema 4

Bisectoarele unghiurilor unui patrulater convex se intersectează şi formează un patrulater inscriptibil.

Desenăm un patrulater ABCD convex şi bisectoarele unghiurilor. Notăm cu x, y, u şi v jumătăţile măsurilor unghiurilor patrulaterului.

Ipoteză	AQ, BN, CN, DQ – bisectoare
Concluzie	PQMN – patrulater inscriptibil



Încercăm să punem în evidenţă o condiţie pe care trebuie să o îndeplinească patrulaterul MNPQ pentru a fi inscriptibil. Arătăm că unghiurile Q şi N sunt suplementare. Cu notaţiile din figură:

În ΔAQD: m(∢AQD)=180º–(x+v).

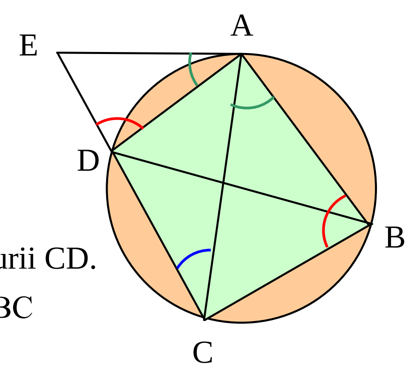
În ΔBNC: m(∢BNC)=180º – (y+u)

⇒m(∢AQD)+m(∢BNC)=360º–(x+v+y+u) (1). Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360º, adică 2x+2y+2u+2v=360º, deci x+v+y+u=180º. Înlocuind în relaţia (1), găsim că unghiurile AQD şi BNC sunt suplementare. Dar ∢AQD≡∢PQM şi ∢BNC≡∢MNP ca unghiuri opuse la vârf. Rezultă că patrulaterul MNPQ are două unghiuri opuse suplementare, deci este inscriptibil.

O teoremă a cărei rezolvare cere o construcţie ajutătoare neevidentă este teorema lui Ptolemeu (matematician, astronom şi geograf din Alexandria, 85 – 168 d. Hr.). Ptolemeu a dat dovadă de ingeniozitate atât în rezolvarea teoremelor cât şi în alcătuirea hărţilor, în reprezentarea cărora a introdus o grilă, asemănătoare coordonatelor de latitudine şi longitudine folosite în prezent.

5. Teorema lui Ptolemeu

În orice patrulater inscriptibil, produsul lungimilor diagonalelor este egal cu suma produselor lungimilor laturilor opuse.



Construim patrulaterul ABCD inscriptibil şi cercul circumscris.

Ipoteză | ABCD- inscriptibil

Concluzie| AC·BD=AB·DC+AD·BC

Demonstraţie:

Construim ∢DAE≡∢BAC, punctul E fiind situat pe prelungirea laturii CD.

∢ADE≡∢ABC deoarece au acelaşi suplement ∢ADC. ΔADE~ΔABC

$\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DE = \frac{BC \cdot AD}{AB}$ (1)

∢EAC≡∢DAB ca unghiuri formate din unghiurile congruente EAD şi BAC la care se adună unghiul DAC comun.

∢ACE≡∢ABD (subântind acelaşi arc AD). ⇒ΔEAC~ΔABD ⇒

$\frac{BD}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$ AC·BD=AB·EC, dar EC=ED+DC ⇒AC·BD=AB(ED+DC) şi cu relaţia (1) ⇒

AC·BD=AB·$\frac{BC \cdot AD}{AB} + AB \cdot DC$ şi simplificând obţinem relaţia din enunţ

AC·BD=AB·DC+AD·BC

Bibliografie

GURAN E. *Matematică recreativă,* Editura Junimea, 1985

BOBANCU V., *Caleidoscop matematic*, Editura Albatros, București 1979

GARDNER, M., *Amuzamente matematice*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

LITTLEWOOD, J.E., *Varietăţi matematice,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1969.

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii*. *Antichitatea*, *Evul mediu, Renaşterea,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

VODA, V, Gh., *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.

IOSUB B. *Aritmetica distractivă,* Editura Tineretului, București, 1957