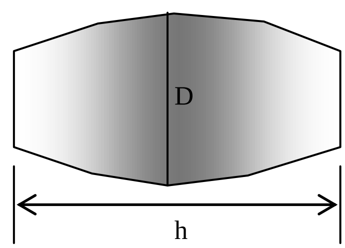
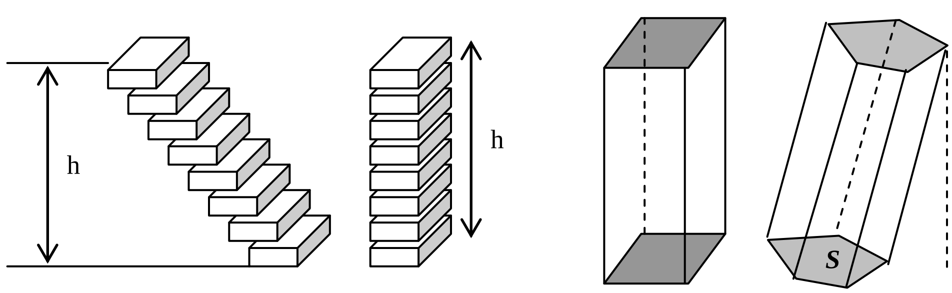
PRINCIPIUL LUI CAVALIERI

Profesor Florea Adrian
Şcoala Gimnazială ,,Avram Iancu"
Bucureşti

Dacă pentru a calcula ariile unor suprafeţe s-au găsit metode foarte precise, calcularea volumelor unor corpuri a fost o problemă greu de rezolvat. În vechime, vasele aveau diverse forme, volumele lor fiind foarte diferite, iar pentru cantităţi mari de lichide se foloseau butoaiele. Măsurarea volumelor lor folosind un vas mai mic drept unitate de măsură nu era deloc practic. De aceea s-a folosit o formulă aproximativă, care era foarte practică, iar eroarea putea fi neglijată. Astfel volumul unui butoi se calcula cu formula $V = 0{,}82 \cdot D \cdot d \cdot h$
unde D = diametrul cel mai mare, d = diametrul cel mai mic, iar h = înălţimea butoiului.

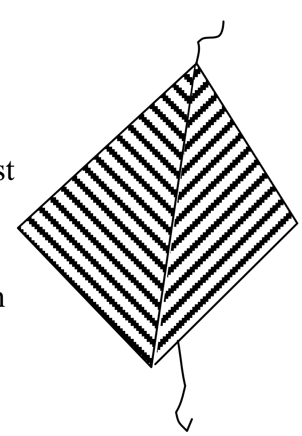


În Europa medievală, matematicianul italian Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647), elev al lui Galileo Galilei, a făcut observaţii importante asupra corpurilor geometrice, enunţând în 1629 un principiu:
Principiul lui Cavalieri. *Corpurile cu aceleaşi secţiuni transversale şi cu aceeaşi înălţime au aceleaşi volume. În particular, prismele sau cilindrii cu aceleaşi baze şi aceeaşi înălţime, au volume egale.*



Justificarea principiului se poate face în mod sugestiv, considerând un teanc de plăcuţe subţiri. Prin schimbarea poziţiilor plăcuţelor se pot obţine corpuri de altă formă dar cu acelaşi volum. Acest fapt este evident, deoarece plăcuţele rămân aceleaşi.

De asemenea putem face un model aproximativ al unei piramide patrulatere formată din cartonaşe pătrate din ce în ce mai mici. Perforăm cartonaşele şi prin orificiile obţinute, trecem o sfoară. Putem deforma



piramida după dorinţă, dar volumul său va rămâne neschimbat, acesta fiind suma volumelor cartonaşelor.

Folosirea principiului lui Cavalieri în stabilirea formulelor pentru volumele corpurilor a fost de mare importanţă. El este folosit în teoria funcţiilor care exprimă aria secţiunii într-un corp, în analiza matematică.

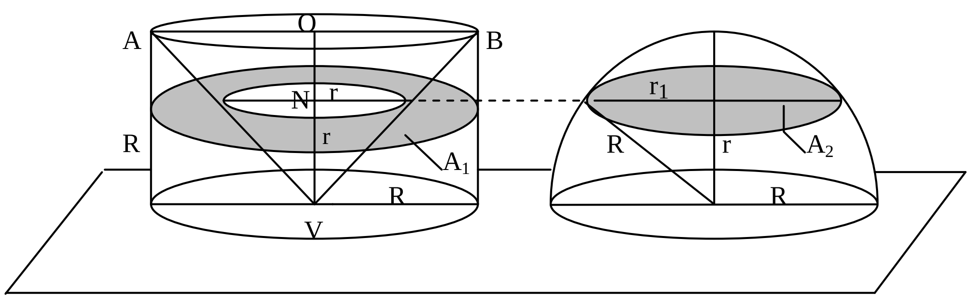
Să aplicăm principiul lui Cavalieri pentru calcularea volumului sferei.

Facem mai întâi o constatare importantă:

- emisfera de rază R are acelaşi volum ca şi cilindrul circular drept care are înălţimea R şi raza bazei R, din care se înlătură un con circular drept cu înălţimea R şi raza bazei R (conul cu vârful V şi baza AB).

Secţionăm cele două corpuri cu un plan paralel cu baza situat la o distanţă oarecare r. Aria secţiunii în cilindru este egală cu aria A_1 a coroanei circulare: $A_1 = \pi(R^2 - r^2)$. Aria secţiunii în emisferă este A_2, egală cu aria cercului de rază r_1. Cu teorema lui Pitagora găsim: $r_1^2 = R^2 - r^2$, iar $A_2 = \pi r_1^2 = \pi(R^2 - r^2)$. Am găsit astfel că $A_1 = A_2$. Analog găsim că toate secţiunile în cele două corpuri, duse la aceeaşi distanţă faţă de bază, sunt echivalente. Conform principiului lui Cavalieri, cele două corpuri au

volume egale. $V_{cil} - V_{con} = \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}$; adică $V_{sferă} = \frac{4\pi R^3}{3}$.

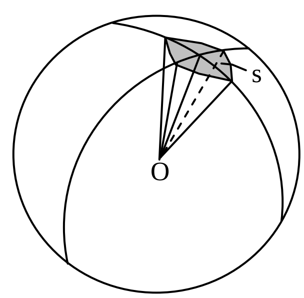


Cunoscând volumul sferei, putem deduce formula de calcul a suprafeţei (ariei).

Considerăm o piramidă patrulateră cu vârful în centrul sferei şi vârfurile bazei pe suprafaţa sferei. Dacă patrulaterul este foarte mic, înălţimea piramidei poate fi aproximată cu raza sferei. Suma volumelor tuturor piramidelor de acest fel va aproxima volumul sferei, iar suma ariilor bazelor va aproxima aria sferei (S).

$V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n \quad \Rightarrow V = \frac{s_1 R}{3} + \frac{s_2 R}{3} + \ldots\ldots + \frac{s_n R}{3} \Rightarrow V = \frac{R}{3}(s_1 + s_2 + \ldots s_n)$, adică

$$V = \frac{R}{3} \cdot S \Rightarrow S = \frac{3}{R} V = \frac{3}{R} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow S = 4\pi R^2$$



Invers, ştiind că aria sferei este $S=4\pi R^2$, putem calcula volumul acesteia.

Împărţim suprafaţa sferei în *n* suprafeţe, fiecare cu aria *s*.

Piramida mică cu aria bazei *s* are înălţimea egală cu raza R. Volumul piramidei mici este $v = \frac{s \cdot R}{3}$. Făcând suma volumelor tuturor piramidelor mici, obţinem volumul sferei $V=n \cdot v=\frac{n \cdot s \cdot R}{3}$.

Dar $n \cdot s=S=4\pi R^2$, adică $V=\frac{4\pi R^3}{3}$.

Bibliografie

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii*. *Antichitatea, Evul mediu, Renaşterea,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974

GARDNER, M., *Amuzamente matematice*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

LITTLEWOOD, J.E., *Varietăţi matematice,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1969.

IOSUB B. *Aritmetica distractivă,* Editura Tineretului, București, 1957