METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE GEOMETRIE

Profesor Florea Adrian
Școala Gimnazială ,,Avram Iancu"
București

Metoda analizei

Metoda analizei este o metodă foarte des întâlnită la rezolvarea problemelor. Să urmărim aplicarea acestei metode în rezolvarea unei probleme de calcul:

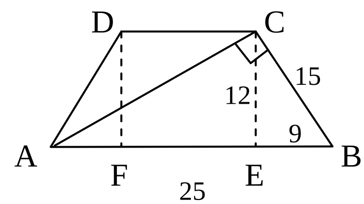
- După desenarea figurii şi scrierea ipotezei şi a concluziei, se pleacă de la concluzia problemei.
- Să presupunem că se cere calcularea mărimii M. Mărimea M depinde de alte mărimi, să zicem de mărimile A şi B. Dacă acestea sunt cunoscute (date prin ipoteză), se înlocuiesc cu valorile respective şi se găseşte valoarea mărimii M.
- Dacă mărimea A (sau B) nu este cunoscută, se încearcă aflarea ei. Se scrie o nouă relaţie în care să apară mărimea A. Mărimea A poate fi pusă în relaţie cu mai multe alte mărimi, dar se alege aceea în care se cunosc celelalte mărimi, sau cât mai multe dintre ele. Procedeul se repetă până când valorile ultimelor mărimi se pot afla cu datele din ipoteză şi cu cele aflate ulterior. Parcurgând drumul înapoi spre mărimea M, aflăm valoarea acesteia.

- Observaţie: La rezolvarea problemelor de geometrie trebuie să desenăm figura cât mai îngrijit, conform datelor problemei (cu dimensiunile micşorate proporţional). Unghiurile trebuie desenate cu măsurile cât mai apropiate de valorile date prin ipoteză. Judecăţile pe care le facem sunt urmare a analizării figurii. Valorile mărimilor cunoscute prin ipoteză este foarte util să le scriem pe elementele corespunzătoare din figură. Pentru reuşita rezolvării problemei este esenţial să se cunoască foarte bine definiţiile şi proprietăţile figurilor geometrice care apar în figura respectivă şi de asemenea teoremele colaterale. Toate acestea trebuie cunoscute atât de bine, încât *ele* să ne sugereze paşii următori.

Exemplul 1:

Se dă un trapez isoscel ABCD cu baza mare AB şi baza mică CD. Ştim că AB=25cm, AD=BC=15cm şi că diagonala AC este perpendiculară pe latura BC. Să se calculeze aria trapezului.

Desenăm figura: ABCD trapez isoscel cu $AC \perp BC$.



Ipoteză	ABCD – trapez isoscel AB=25cm, AD=BC=15cm, $AC \perp BC$
Concluzie	S_{ABCD}=?

Pornim de la concluzie şi scriem $S_{ABCD}=\frac{(B+b)\cdot i}{2}$. Cunoaştem lungimea bazei mari dar nu cunoaştem lungimea bazei mici şi nici lungimea înălţimii. Construim înălţimile trapezului CE şi DF. Observăm că înălţimea CE a trapezului este înălţime şi în triunghiul dreptunghic ACB (înălţimea corespunzătoare ipotenuzei AB).

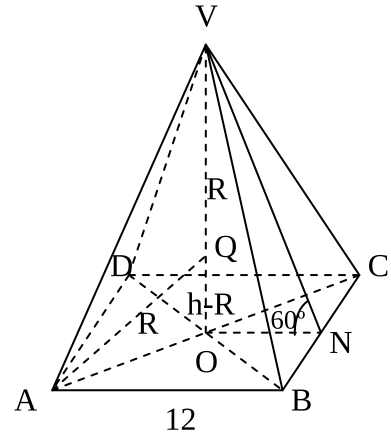
Scriem CE= $\frac{BC\cdot AC}{AB}$, adică CE= $\frac{15\cdot AC}{25}$. Nu cunoaştem lungimea AC, dar o putem calcula cu teorema lui Pitagora în triunghiul ACB: $AC^2=AB^2-BC^2 \Rightarrow AC^2=625-225 \Rightarrow AC^2=400 \Rightarrow$ AC=20cm. Acum ne întoarcem şi calculăm lungimea înălţimii: CE= $\frac{15\cdot 20}{25}$ $\Rightarrow$CE=12cm În relaţia (formula) ariei, mai avem de găsit lungimea bazei mici. Baza mică CD este egală cu FE. Pentru a afla lungimea segmentului FE, observăm din figură că este suficient să calculăm lungimea segmentului EB. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul CEB avem: $EB^2=BC^2-CE^2$ $\Rightarrow EB^2=225-144 \Rightarrow EB^2=81 \Rightarrow EB=9$cm. Deoarece AF=EB $\Rightarrow$FE=25 – 18 =7cm şi cum FE=DC, am găsit şi lungimea bazei mici. Acum putem calcula aria trapezului prin înlocuirea cu valorile calculate $S_{ABCD}=\frac{(25+7)\cdot 12}{2}$ adică $S_{ABCD}=192cm^2$.

Exemplul 2.

Se dă o piramidă patrulateră regulată care are muchia bazei cu lungimea de 12cm, iar o faţă laterală formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 60º. Calculaţi: a) Aria laterală a piramidei.

b) Volumul piramidei. c) Lungimea razei sferei circumscrise piramidei.

Desenăm o piramidă patrulateră regulată în care să apară şi înălţimea VO, apotema bazei ON şi apotema piramidei VN. Încercând să scriem ipoteza observăm că trebuie mai întâi să identificăm unghiul format de o faţă laterală cu planul bazei. Pentru aceasta trebuie să ştim că unghiul format de două plane este unghiul format de perpendicularele duse din planele respective pe dreapta de intersecţie a acelor plane.



$$\left.\begin{array}{l}(VBC)\cap(ABC)=BC\\ VN\subset(VBC), VN\perp BC\\ ON\subset(ABC), ON\perp BC\end{array}\right|\Rightarrow \sphericalangle[(VBC),(ABC)]=\sphericalangle VNO.$$

Acum putem scrie ipoteza şi concluzia:

Ipoteză	VABCD – piramidă regulată
	AB=12cm, $m\sphericalangle[(VBC),(ABC)]=60^\circ$
Concluzie	a) A_l=?
	b) V=?
	c) R=?

a) Scriem formula pentru aria laterală a piramidei: $A_l = \frac{P_b \cdot A_p}{2}$. Putem calcula perimetrul bazei: $P_b = 4l \Rightarrow P_b = 4\cdot 12 = 48$cm. Nu cunoaştem apotema VN. Analizând figura, observăm că în triunghiul dreptunghicVON, $m\sphericalangle(NVO) = 30^\circ$, fiind complementul unghiului VNO care are măsura de 60º. ON = 6cm, fiind jumătate din AB, iar VN este de 12 cm (ipotenuza este dublul catetei care se opune unghiului de 30º). Putem afla acum aria laterlă: $A_l=\frac{48\cdot 12}{2}=288$ cm^2.

b) Scriem formula volumului: $V = \frac{S_b \cdot h}{3}$. Nu cunoaştem aria bazei S_b, dar o putem afla uşor: $S_b = l^2 \Rightarrow S_b = 144cm^2$. Mai rămâne să calculăm lungimea înălţimii VO. Din triunghiul VON putem afla VO şi cu teorema lui Pitagora şi cu sinusul unghiului VNO. Cu sinusul unghiului VNO găsim: $VO = VN\cdot\sin(\sphericalangle VNO) \Rightarrow VO = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. Volumul va fi $V = \frac{288\cdot 6\sqrt{3}}{3}=576\sqrt{3}\,cm^3$.

c) Pentru a calcula lungimea razei sferei circumscrise piramidei, presupunem că punctul Q este centrul acesteia. Avem VQ=R. Trebuie să mai punem în evidenţă, în mod avantajos, încă o rază. Aceasta este AQ. În triunghiul dreptunghic QOA avem două laturi cu lungimi necunoscute, dar le putem exprima în funcţie de o singură necunoscută R. Avem QA=R,

$QO=VO-R=6\sqrt{3}-R$ şi $AO=6\sqrt{2}$. Cu teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul QOA, obţinem o ecuaţie cu o singură necunoscută R: $AQ^2 = QO^2 + AO^2 \Rightarrow R^2=(6\sqrt{3} - R)^2 + (6\sqrt{2})^2$ $\Rightarrow R^2 = 108 - 12\sqrt{3}R + R^2 + 72 \Rightarrow$ $R^2-R^2+12\sqrt{3}R=180 \Rightarrow 12\sqrt{3}R=180 \Rightarrow R=\frac{180}{12\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$ cm.

Altă metodă: Nu ştim o formulă pentru aflarea lungimii razei sferei circumscrise unei piramide, dar raza sferei este egală cu raza cercului circumscris triunghiului VAC. Raza cercului circumscris unui triunghi este $R=\frac{abc}{4S}$. Lungimile a, b, c sunt lungimile CV, VA respectiv AC, care se pot calcula uşor cu teorema lui Pitagora.

Aria S este $S=\frac{AC\cdot VO}{2}$.

Bibliografie

GURAN E. *Matematică recreativă,* Editura Junimea, 1985

BOBANCU V., *Caleidoscop matematic*, Editura Albatros, București 1979

GARDNER, M., *Amuzamente matematice*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

LITTLEWOOD, J.E., *Varietăţi matematice,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1969.

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii*. *Antichitatea, Evul mediu, Renaşterea,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

VODA, V, Gh., *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.

IOSUB B. *Aritmetica distractivă,* Editura Tineretului, București, 1957