ȘIRURI DE NUMERE

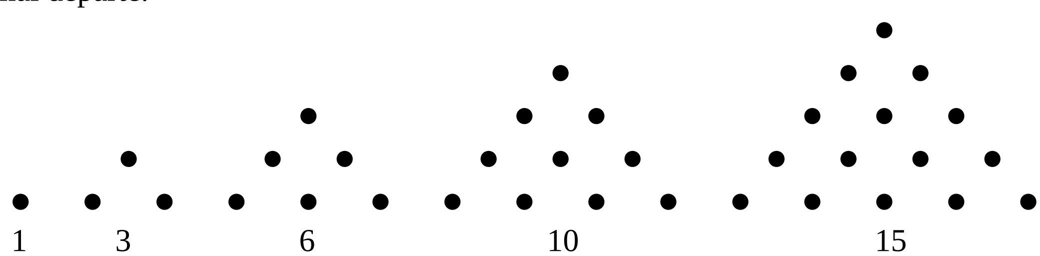
Profesor Florea Adrian
Școala Gimnazială ,,Avram Iancu"
București

Matematicienii Greciei antice nu s-au ocupat cu dezvoltarea regulilor şi a tehnicilor de calcul. Ei foloseau pentru calcule *abacul*, un instrument asemănător cu *numărătoarea* folosită în clasele mici, care le era suficient pentru efectuarea celor patru operaţii. Probabil că şi modul de scriere a numerelor şi necunoaşterea unui sistem poziţional a constituit un handicap. Matematicienii abordau matematica mai mult din punct de vedere filosofic, încercând să găsească proprietăţi ale numerelor, proprietăţi ale figurilor şi corpurilor geometrice. Erau fascinaţi de proprietăţile descoperite şi discutau îndelung, încercând să aprofundeze şi să găsească noi relaţii. Era ca o magie. De aceea unii dintre ei au devenit mistici. Chiar şi Pitagora era convins că toate lucrurile, fiinţele şi fenomenele erau formate, generate de numere. Apa, pământul, focul, culorile florilor, sunetele, toate sunt determinate de numere.

Ei au clasificat numerele în pare şi impare, naturale, raţionale, iraţionale, masculine, feminine, prime, neprime, triunghiulare, pătratice, pentagonale, perfecte, amiabile, faste şi nefaste. Numărul 1 reprezenta raţiunea, iar numărul 2 exprima părerea. Trei era primul număr masculin, iar 2 mai era primul număr feminin. În consecinţă 5 era imaginea căsătoriei. Patru avea darul justiţiei, iar 6 conţinea secretul sănătăţii, etc.

1. Numere triunghiulare

Am amintit mai sus de astfel de numere. Cum se formează aceste numere? Se porneşte de la o bilă. Apoi se formează un triunghi cu trei bile aşezate în vârfuri. În continuare sub baza de două bile a triunghiului, se adaugă trei bile, care formează baza unui nou triunghi mai mare şi aşa mai departe.



Numărând bilele ce formează fiecare triunghi începând cu 1, obţinem numerele: 1, 3, 6, 10, 15, 21, …Aceste numere le-am scris unul după altul într-un şir. Observăm că se succed după o regulă bine definită. Fiecare dintre ele este un *număr triunghiular*.
Aceste numere pot fi scrise şi sub forma semiprodusului dintre cele două numere consecutive corespunzătoare rangului lor:

$1=\frac{1\cdot 2}{2}$; $3=\frac{2\cdot 3}{2}$; $6=\frac{3\cdot 4}{2}$; $10=\frac{4\cdot 5}{2}$; $\cdots$; $N=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

I număr; al II-lea; al III-lea; al IV- lea; …, al n-lea număr.

2. Numere piramidale

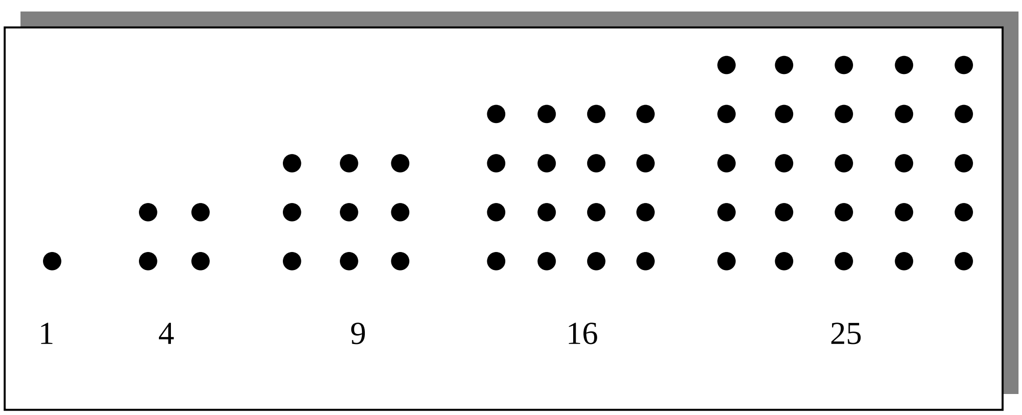
Tot din antichitate au fost cunoscute şi denumite *numere piramidale*, numerele care erau formate din sumele succesive ale numerelor tringhiulare.

Numere triunghiulare: 1; 3; 6; 10; 15;…

Numere piramidale 1; 1+3=4; 1+3+6=10; 1+3+6+10=20; 1+3+6+10+15=45

3. Numere pătratice

Asemănător cu numerele triunghiulare se obţin *numerele pătratice*, denumirea provenind de la faptul că acum se formează pătrate. Se porneşte şi aici de la 1, apoi se formează pătratul de 2×2 bile, apoi pătratul de 3×3 bile, urmează cel de 4×4, etc.



Şi aici obţinem un şir de numere: 1, 4, 9, 16, 25,…formate după o anumită regulă.

Mai multe numere scrise unul după altul, spunem că le-am scris într-un şir, sau că formează un şir. Dar din punct de vedere matematic, un şir (de numere) este ceva mai special. Astfel, într-un şir este important locul pe care-l ocupă fiecare număr, ordinea în care sunt scrise numerele în şir. Mai mult, între numerele unui şir există o anumită legătură, o relaţie. Numerele care

formează un şir se numesc *termenii* şirului. În general un şir îl scriem sub forma a_1, a_2, a_3,…, a_n,… unde a_1 este primul termen (primul număr), a_2 este al II-lea ,… a_n este al n-lea termen.
Se face astfel o corespondenţă între numerele naturale şi poziţia termenilor în şir.
$1 \rightarrow a_1$, $2 \rightarrow a_2$, $3 \rightarrow a_3$,…, $n \rightarrow a_n$. Cel mai simplu şir este şirul numerelor naturale : 1, 2, 3, 4, …, n,….
Alte şiruri: 0, 2, 4, 6, 8,…, 2k cu $k \in \mathbf{N}$, şirul numerelor naturale pare;
1, 3, 5, 7, …, 2k +1,… $k \in \mathbf{N}$, şirul numerelor naturale impare.

De multe ori regula de obţinere a termenilor unui şir nu este evidentă. Pentru o scriere prescurtată şi pentru precizarea regulii de formare a şirului, se scrie o "formulă", o expresie a termenului general, care ne arată modul de formare. Astfel să luăm un exemplu: $a_n = 3n - 1$, cu $n \in \mathbf{N}^*$. Putem găsi uşor numerele care formează un astfel de şir. Regula este clară: înmulţeşte fiecare număr natural (începând cu 1) cu 3 şi de fiecare dată scade 1. Găsim următoarele numere:

Pentru: $n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 1 - 1 \Rightarrow a_1 = 2$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2 - 1 \Rightarrow a_2 = 5$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 3 - 1 \Rightarrow a_3 = 8$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 4 - 1 \Rightarrow a_4 = 11$
…………………………………..
$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3 \cdot 20 - 1 \Rightarrow a_{20} = 59$
…………………………………..

Alt exemplu:
$a_n = 2n + 3$, $n \in \mathbf{N}^*$
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 3 \Rightarrow a_1 = 5$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 + 3 \Rightarrow a_2 = 7$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 + 3 \Rightarrow a_3 = 9$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 4 + 3 \Rightarrow a_4 = 11$
………………………………
$n = 100 \Rightarrow a_{100} = 2 \cdot 100 + 3 \Rightarrow a_{100} = 203$
…………………………………………..

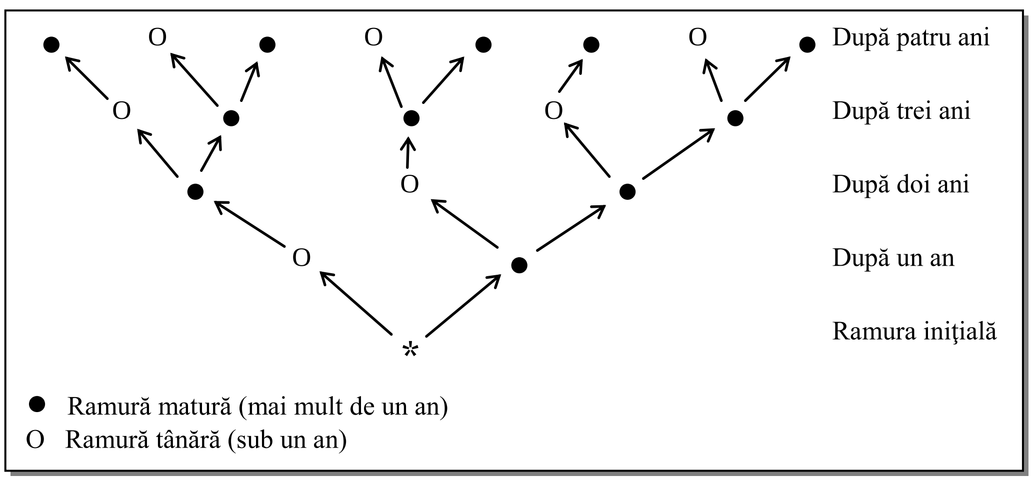
În primul exemplu dat, după n = 4 am sărit la n = 20, dar am scris între ele …, care ne spun că după n = 4 urma n = 5, apoi n = 6 şi aşa mai departe. Dacă vrem să găsim doar un anumit termen nu trebuie să-i scriem pe toţi precedenţii, astfel în acest exemplu s-a vrut să se ştie al 20-lea termen şi am dat lui n valoarea 20. În exemplul al II-lea am dat lui n valoarea 100 pentru a afla direct al 100-lea termen.
Primele consemnări despre şiruri de numere le avem de la Leonardo da Pisa, cunoscut sub numele Fibonacci, nume derivat de la filius Bonacci (fiul lui Bonacci). Fibonacci a făcut călătorii în Orient şi a studiat la universităţi arabe. Aici a luat cunoştinţă de sistemul de numeraţie indo-arab şi a preluat şi semnele

folosite pentru cifre. Reîntors în Europa, el scrie în anul 1202 o carte de aritmetică şi algebră, numită "*Liber abacci*"(Cartea abacului), carte devenită celebră şi care impune în Europa cifrele folosite şi în prezent, inclusiv pe zero. Cartea cuprindea metodele de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire, multe probleme distractive de aritmetică şi algebră a căror rezolvare se făcea prin metode noi. Tot aici se prezintă şi anumite şiruri de numere. Un astfel de şir este următorul " 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …" şirul lui Fibonacci.

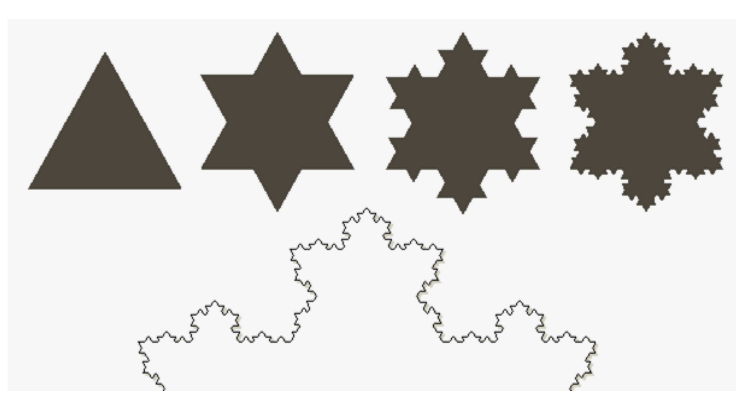
Primul termen este 1, al II-lea este tot 1. Următorii termeni se obţin prin adunarea celor două numere precedente: 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3, 13 = 8 + 5 etc.

Se poate porni cu alt număr iniţial, dar se păstrează regula: 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, …Există desigur şi alte reguli de formare a termenilor, de exemplu prin înmulţirea celor două numere precedente: 2, 2, 4, 8, 32, 256, 8192, …

În figura de mai jos se prezintă o schemă în care se arată modul de creştere a ramurilor unui arbore: din fiecare ramură după un an creşte o nouă ramură.



Este foarte interesant că în natură există fenomene fizice şi procese biologice ce urmează reguli de formare a termenilor dintr-un şir tip Fibonacci, cum ar fi: modul de formare a fulgilor de zăpadă, numărul de celule care se formează după un anumit timp într-un ţesut viu, numărul de ramuri ale unui copac sau numărul de frunze după o perioadă de timp etc. Există şi o teorie modernă şi mult mai profundă "Teoria fractalilor", care la modul cel mai simplificat are asemănări cu şirurile Fibonacci.



Bibliografie

GURAN E. *Matematică recreativă,* Editura Junimea, 1985

BOBANCU V., *Caleidoscop matematic,* Editura Albatros, București 1979

GARDNER, M., *Amuzamente matematice*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

LITTLEWOOD, J.E., *Varietăţi matematice,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1969.

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii*. *Antichitatea*, *Evul mediu, Renaşterea,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

VODA, V, Gh., *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.

IOSUB B. *Aritmetica distractivă,* Editura Tineretului, București, 1957