ECUAŢII DIOFANTICE

Profesor Florea Adrian
Școala Gimnazială ,,Avram Iancu"
București

Încă din vechime matematicienii şi-au propus să rezolve ecuaţii cu două variabile de gr.I, în mulţimea numerelor naturale. Rezolvarea acestor probleme s-a găsit în lucrările matematice ale lui Diofant, despre care am vorbit la începutul capitolului. De aceea, acest tip de ecuaţii rezolvate în mulţimea numerelor naturale s-au numit "ecuaţii diofantice". Apoi rezolvarea s-a extins la mulţimea numerelor întregi.

Ecuaţia diofantică de gradul I cu două necunoscute este de forma $ax+by=c$, unde a, b, c sunt numere întregi, iar necunoscutele x şi y sunt şi ele întregi.

Perechea de numere (x_0, y_0) este o soluţie a ecuaţiei, dacă $ax_0+by_0=c$ este propoziţie adevărartă. A rezolva ecuaţia înseamnă a găsi toate soluţiile. Pentru rezolvare se disting trei cazuri:

1 – Dacă a şi b sunt prime între ele , adică $(a, b)=1$ (cel mai mare divizor comun al lor este 1), $x=x_0+bk$. Înlocuind în ecuaţie obţinem:

$y=\frac{c-a(x_0+bk)}{b}=\frac{by_0-abk}{b}=y_0-ak$, unde (x_0, y_0) este o soluţie oarecare.

2 – Dacă $(a, b)=d$ şi d nu divide pe c, ecuaţia este imposibilă, adică nu are nici o soluţie, deoarece membrul întâi se divide prin d, iar membrul al doilea nu se divide prin d.

3 – Dacă $(a, b)=d$ şi d divide şi pe c, atunci ecuaţia se împarte cu d şi se ajunge la cazul 1.

Să se rezolve ecuaţia $2x-5y=7$ cu x şi y numere naturale.

Scriem: $2x=5y+7 \Rightarrow x=\frac{5y+7}{2} \Rightarrow x=\frac{4y+6}{2}+\frac{y+1}{2} \Rightarrow x=2y+3+\frac{y+1}{2}$

Notăm $\frac{y+1}{2}=t \Rightarrow y=2t-1$, iar x devine $x=2(2t-1)+3+t \Rightarrow$ $x=4t-2+3+t \Rightarrow x=5t+1$

Am găsit astfel $x=5t+1$ şi $y=2t-1$

Pentru toate valorile naturale (>0) ale lui t se obţin toate perechile de numere naturale x şi y care verifică ecuaţia.

De exemplu pentru $t=1 \Rightarrow x=6, y=1$.

Alt exemplu: $4x-7y=17$

$4x=7y+17 \Rightarrow x=\frac{7y+17}{4} \Rightarrow x=\frac{4y+16+3y+1}{4} \Rightarrow x=y+4+\frac{3y+1}{4}$ (1)

Notăm $\frac{3y+1}{4}=t \Rightarrow 3y=4t-1 \Rightarrow y=\frac{4t-1}{3} \Rightarrow y=t+\frac{t-1}{3}$ (2). Facem o nouă substituţie notând $\frac{t-1}{3}=p \Rightarrow t-1=3p \Rightarrow t=3p+1$. Înlocuind pe t în (2) obţinem $y = 4p + 1$ şi înlocuind pe y cu $4p+1$ în (1), obţinem $x = 7p + 6$. Soluţiile sunt de forma ($7p + 6$, $4p + 1$), pentru valori naturale ale lui p.

Pentru $p = 0$ găsim $x = 6$ şi $y = 1$. Pentru $p = 1$, găsim $x = 17$ şi $y = 5$, etc.

Bibliografie

GARDNER, M., *Amuzamente matematice*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

LITTLEWOOD, J.E., *Varietăţi matematice,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1969.

IOSUB B. *Aritmetica distractivă,* Editura Tineretului, București, 1957

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii*. *Antichitatea, Evul mediu, Renaşterea,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974