

Rădăcinile polinoamelor. Relațiile lui Viète – Proiect didactic

prof. Pop Adela Terezia
Colegiul Tehnic "Aurel Vlaicu", Baia Mare

Clasa : a-XII-a

Obiectul : Matematică - Algebră

Subiectul lecției : Rădăcinile polinoamelor. Relațiile lui Viète

Tipul lecției : Lecție de formare de priceperi și deprinderi de calcul.

Competențe generale :

1. Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite.
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural sau contextual cuprinse în enunțuri matematice.
3. Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete.
4. Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații problemă în scopul găsirii de strategii pentru optimizarea soluțiilor.
5. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora.

Competențe specifice :

3.2 Aplicarea unor algoritmi în calculul polinomial sau în rezolvarea ecuațiilor algebrice

5.2 Determinarea unor polinoame sau ecuații algebrice care îndeplinesc condiții date

6.1 Exprimarea unor probleme practice folosind calcul polinomial

Strategia didactică: activ-participativă.

- **Metode și procedee didactice:** conversația euristică, exercițiul, demonstrația, munca independentă.
- **Material didactic utilizat:** manual clasa a-XII-a, fișe de lucru .
- **Tipuri de activități :** frontală și individuală.
- **Procedee de evaluare:** analiza răspunsurilor, observarea sistematică a atenției, verificarea cantitativă și calitativă a temei.

Scenariu didactic:

1.Moment organizatoric: Verificarea prezentei elevilor și notarea absențelor (dacă sunt) în catalog;

Asigurarea unei atmosfere adecvate pentru buna desfășurare a orei;

2.Captarea atenției: Verificarea temei elevilor prin sondaj folosind dialogul profesor-elev; elev-elev, prin confruntarea rezultatelor (în cazul în care apar diferențe se rezolvă exercițiile la tablă).

3.Informarea elevilor asupra obiectivelor lecției: Se anunță și se scrie pe tablă titlul lecției: **Rădăcinile polinoamelor. Relațiile lui Viète**

4. Prezentare de material nou

Relațiile lui Viète stabilesc legătura între coeficienții unui polinom și rădăcinile sale

I. Dacă $f = aX^2 + bX + c \in C[X]$, $a \neq 0$, are rădăcinile x_1, x_2 atunci:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ecuția $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \mid : a \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

Observație: Ecuția de gradul al doilea cu rădăcinile x_1, x_2 este $x^2 - Sx + P = 0$

Exemplu: Scrieți relațiile lui Viete pentru polinomul $f = X^2 - 3X + 4$

Ex. 1, 2, 3 din fișa de lucru.

II. Dacă $f = aX^3 + bX^2 + cX + d \in C[X]$, $a \neq 0$, are rădăcinile x_1, x_2, x_3 atunci:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ S_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \\ S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Observație: Ecuția de gradul al treilea cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 este $x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$

Exemplu: Scrieți ecuația de gradul al treilea care are rădăcinile $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$

Ex. 4, 5 din fișa de lucru.

III. Dacă $f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in C[X]$, $a \neq 0$, are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 atunci:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \\ S_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a} \\ S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\frac{d}{a} \\ S_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a} \end{cases}$$

Observație: Ecuția de gradul al patrulea cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 este

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

Exemplu: Scrieți relațiile lui Viete pentru polinomul $f = -X^4 + 2X^3 + X^2 - 5X + 1$

Ex. 5 din fișa de lucru.

5.Consolidarea cunostințelor și asigurarea feed-back-ului : Fiecare elev va primi cate o fișă de lucru. Pe parcursul rezolvării exercițiilor, profesorul intervine cu întrebări, adresate atât elevilor de la tablă cât și celor din clasă, pentru a se clarifica demersul rezolvării.

6.Tema pentru acasă : Se vor propune spre rezolvare ca temă pentru acasă, exercițiile rămase nerezolvate din fișă și pag. 178, ex. 60.

7.Aprecieri: se notează elevii care s-au evidențiat în timpul orei.

Fișă de lucru. Relațiile lui Viete.

1. Să se formeze ecuații de gradul al doilea ale cărei soluții verifică relațiile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 11 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{11}{30} \end{cases}$$

2. Să se arate că rădăcinile polinomului $f = X^2 - 2mX + m^2 - 1$ verifică relația:

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 2 \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

3. Să se determine valorile reale ale lui m , știind că rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației

$$x^2 - mx + m + 2 = 0, \text{ verifică egalitatea } 2x_1x_2 = x_1 + x_2.$$

4. Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Calculați:

a) $x_1 + x_2 + x_3$

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

5. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului

$$f = X^3 - 3X + 2.$$

a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$

b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$

c) Să se calculeze valoarea determinantului d .

5. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

c) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$