Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor – Proiect didactic

prof. Pop Adela Terezia
Colegiul Tehnic "Aurel Vlaicu", Baia Mare

Clasa: a XII -a
Obiectul: Matematica-Analiză matematică
Subiectul lecţiei: Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor
Tipul lecţiei: Lecţie de dobândire de noi cunoştinţe.
Conpetenţe generale :
1. Caracterizarea unor funcţii utilizând reprezentarea geometrica a unor cazuri particulare.
2. Interpretarea unor proprietăţi ale funcţiilor cu ajutorul reprezentarilor grafice.
3. Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferenţial în rezolvarea unor probleme şi modelarea unor procese.
4. Exprimarea cu ajutorul noţiunilor derivabilitate, tabel de variaţie a unor proprietăţi cantitative şi calitative ale unei funcţii.
5. Studierea unor funcţii din punct de vedere cantitativ si calitativ utilizand diverse procedee: majorări, minorări pe un interval dat, proprietăţile algebrice şi de ordine ale mulţimii numerelor reale în studiul calitativ local, aproximarea unor funcţii mai simple cunoscute.
6. Utilizarea reprezentării grafice a unei funcţii pentru verificarea unor rezultate şi pentru identificarea unor proprietăţi.
7. Explorarea unor proprietăţi cu caracter local şi/sau global utilizând continuitatea şi derivabilitatea.

Competenţe specifice :
1. Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferenţial în rezolvarea unor probleme.
2. Determinarea intervalelor de convexitate şi concavitate a funcţiilor.
3. Determinarea punctelor de inflexiune.

Strategia didactică: activ-participativă.
- **Metode şi procedee didactice:**conversaţia euristică, exerciţiul, demonstraţia, munca independentă.
- **Material didactic utilizat:** manual clasa a-XI-a, fişe de lucru .
- **Tipuri de actitati:** frontală şi individuală.
- **Procedee de evaluare:** analiza răspunsurilor, observarea sistematică a atenţiei, verificarea cantitativă şi calitativă a temei.

Scenariu didactic:

1.Moment organizatoric: -verificarea prezenţei elevilor şi notarea absenţelor (dacă sunt) în catalog;
- asigurarea unei atmosfere adecvate pentru buna desfăşurare a orei ;

2.Captarea atenţiei: - verificarea temei elevilor prin sondaj folosind dialogul profesor-elev; elev-elev, prin confruntarea rezultatelor (în cazul în care apar diferenţe mari la rezultat, se rezolvă exerciţiile la tablă).

3.Informarea elevilor asupra lectiei: Se anunţă şi se scrie pe tablă titlul lecţiei:
Rolul derivatei a doua în studiul funcţilor

4.Verificarea cunoştinţelor anterioare: Se propune elevilor o activitate interactivă frontală. Profesorul pune întrebări elevilor, urmăreşte completarea răspunsurilor primite şi reţinerea noţiunilor fundamentale însuşite anterior de către elevi şi necesare în rezolvarea exerciţiilor.

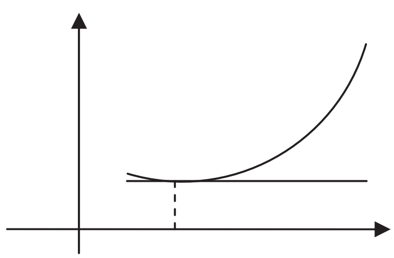
5. Prezentarea de material nou

1. *Determinarea intervalelor de convexitate şi concavitate*

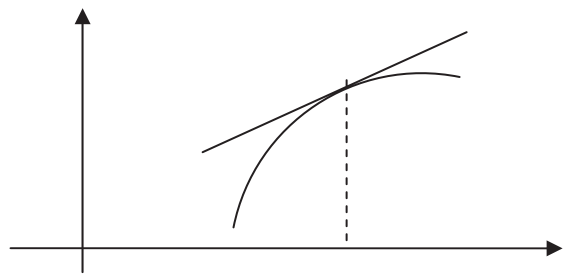
__Definiţie:__ Fie $f : I \rightarrow R$, o funcţie derivabilă pe intervalul *I*.

a) Funcţia *f* se numeşte *<u>convexă</u>* pe intervalul *I*, dacă tangenta în orice punct al graficului funcţiei *f* se află sub acest grafic.

b) Funcţia *f* se numeşte *<u>concavă</u>* pe intervalul *I*, dacă tangenta în oricare punct al graficului funcţiei *f* se află deasupra acestui grafic.



funcţie convexă



funcţie concavă

Pentru studiul convexităţii şi concavităţii unei funcţii de două ori derivabilă, vom utiliza semnul derivatei a doua.

<u>Teoremă</u>: Fie $f : I \rightarrow R$, o funcţie de două ori derivabilă pe intervalul *I*. Atunci:

1) Funcţia *f* este convexă pe intervalul *I* dacă şi numai dacă derivata a doua este pozitivă pe intervalul *I*.

2) Funcţia *f* este concavă pe intervalul *I* dacă şi numai dacă derivata a doua este negativă pe intervalul *I*.

Exemplul 1: Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei:

$$f : R \rightarrow R, f(x) = x^3 - 12x$$

Rezolvare: Funcţia *f* este de două ori derivabilă pe R

$$f'(x) = 3x^2 - 12, \text{ iar } f''(x) = 6x$$

Ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia *x=0*. Construim tabelul de semn pentru derivata a doua:

x	-∞ 0 +∞
$f''(x)$	- - - - - - - - - - -0 + + + + + + + + +
f(x)	

Din tabel rezultă că funcţia *f* este concavă pe intervalul (-∞, 0) şi este convexă pe intervalul (0, ∞).

Stabilirea intervalelor de convexitate şi concavitate a unei funcţii $f : I \rightarrow R$

I. Se calculează derivatele f', respectiv f'' a funcţiei *f*.

II. Se rezolvă ecuaţia $f''(x) = 0$.

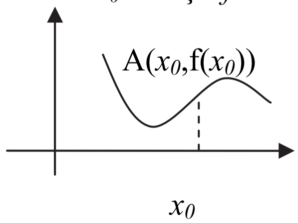
III. Se determină semnul funcţiei f'' pe intervalele pe care aceasta nu se anulează şi se trec datele în tabel.

IV. Se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate în funcţie de semnul derivatei f''.

2. *Determinarea punctelor de inflexiune*

<u>Definiţie</u>: Fie $f : [a,b] \rightarrow R$ şi $x_0 \in (a,b)$.

Punctul $x_0 \in (a,b)$ se numeşte <u>*punct de inflexiune al funcţiei f*</u>, dacă *f* este continuă în x_0 şi dacă într-o parte a lui x_0 funcţia *f* este convexă, iar în cealaltă parte a lui x_0 funcţia *f* este concavă.



<u>*Observaţie:*</u> Dacă funcţia $f:[a,b] \to R$ este derivabilă de două ori în punctul de inflexiune $x_0 \in (a,b)$, atunci $f''(x_0) = 0$.

Pentru o funcţie de două ori derivabilă $f: I \to R$, punctele de inflexiune sunt printre soluţiile ecuaţiei $f''(x_0) = 0$. Determinarea acestora se face studiind semnul derivatei a doua.

Exemplul 2: Determinaţi punctele de inflexiune pentru următoarea funcţie:

$$f: R \to R,\ f(x) = \ln(x^2+1)$$

I. Calculăm $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ şi $f''(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

II. Rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2+2=0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

III. Studiem semnul funcţiei f''

x	$-\infty$ -1 1 ∞
$-2x^2+2$	- - - - - 0 + + 0 - - - - -
$(x^2+1)^2$	+ + + + + + + + + + + +
$f''(x)$	- - - - - 0 + + 0 - - - - -
$f(x)$	

IV. Din tabel rezultă că funcţia *f* este concavă pe intervalul (-∞, -1) şi pe intervalul (1, ∞) şi este convexă pe intervalul (-1, 1). Punctele *x* = -1 şi *x* = 1 sunt puncte de inflexiune pentru funcţia *f*.

Exemplul 3: Determinaţi punctele de inflexiune pentru următoarea funcţie:

$$f: R \to R,\ f(x) = e^x(x^2-4x+6)$$

I. Calculăm $f'(x) = e^x(x^2-2x+2)$ şi $f''(x) = e^x \cdot x^2$

II. Rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

III. Studiem semnul funcţiei f''

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
e^x	+ + + + + + + + + + + + +
x^2	+ + + + + + 0 + + + + + +
$f''(x)$	+ + + + + + 0 + + + + + +
fx)	

IV. Din tabel rezultă că funcţia *f* este convexă pe R. Funcţia *f* nu are puncte de inflexiune deoarece rămâne convexă pe tot domeniul de definiţie (derivata a doua nu îşi schimbă semnul).

6. Consolidarea cunoştinţelor şi asigurarea feed-back-ului: Fiecare elev va primi câte o fişă de lucru. Pe parcursul rezolvării exerciţiilor, profesorul intervine cu întrebări, adresate atât elevilor de la tablă cât şi celor din clasă, pentru a se clarifica demersul rezolvării.

7. Tema pentru acasă: Se vor propune spre rezolvare ca temă pentru acasă, exerciţiile rămase nerezolvate din fişa de lucru.

8.Aprecieri: Se notează elevii care s-au evidenţiat în timpul orei.

Fişă de lucru la rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor

Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate şi punctele de inflexiune ale următoarelor funcţii:

1. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3+3x^2+3x+5$
2. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^x\cdot x$
3. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^x\cdot(x-2)$
4. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^x\cdot(2x+6)$
5. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^x\cdot\left(x^2+2x+1\right)$
6. $f:\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{-1}\}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$
7. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x-arctgx$
8. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\dfrac{x}{e^x}$
9. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$
10. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=e^{2x}\cdot(x+1)$