Studiul unor inegalităţi cu ajutorul mediilor

Prof. Adela Terezia Pop

Colegiul Tehnic "Aurel Vlaicu", Baia Mare

Media aritmetică. Media geometrică

1) Media aritmetică a numerelor *a* si *b* este numărul $M_a = \frac{a+b}{2}$.

Dacă $a < b$ atunci $a < M_a < b$. În cazul în care avem *n* numere , a_1 , a_2 , . . . ,a_n , media lor aritmetică este numarul $M_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$. Şi în acest caz, media aritmetică este mai mare decat cel mai mic dintre ele şi mai mică decat cel mai mare dintre ele. Dacă printre cele *n* numere , m_1 sunt egale cu a_1 , m_2 numere cu a_2 , . . . , m_p numere sunt egale cu a_p astfel încât $m_1+m_2+. . .+m_p = n$, atunci media aritmetică se scrie :

$$M_a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_p a_p}{m_1 + m_2 + ... m_p}$$

şi se mai numeşte *media aritmetică ponderată* a numerelor a_1 , a_2 , ..., a_p cu ponderile m_1, m_2 , . . . , m_p.

2) Media geometrică a numerelor pozitive a şi b este numărul $M_g = \sqrt{ab}$. Dacă a < b , atunci $a < M_g < b$.

3) Dacă numerele a şi b sunt pozitive atunci media lor aritmetică este mai mare decat media lor geometrică . Sa demonstrăm ca $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Este suficient ca în inegalitatea evidenta $x^2 \geq 0$, pentru orice *x* real , să înlocuim pe *x* cu numarul real $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ .Obţinem:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b},)^2 \geq 0$$

de unde a-2$\sqrt{ab} + b \geq 0$ şi deci $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Egalitate obţinem pentru *a* = *b*.

Aplicaţii

Aplicaţia 1

Dacă numerele pozitive a_1 , a_2 , ... , a_n, au produsul egal cu 1 atunci:
$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$

Soluţie: Folosind inegalitatea mediilor pentru 1 şi a_k , k=1,2,...,n:
$1 + a_k \geq 2 \cdot \sqrt{a_k}$
şi înlocuind pe k cu 1, 2, ..., n, obţinem:

$1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1}$,

$1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_2}$,

…

$1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n}$.

Înmulţind membru cu membru cele n inegalităţi obţinem:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Dar din ipoteză, $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$, atunci $\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} = 1$ şi deci:
$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$.

Observaţie: Egalitatea se obţine dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

Aplicaţia 2

Fie numerele a_1 , a_2 , a_3 , a_4 reale pozitive. Să se arate că :

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \sqrt{a_1 a_4} + \sqrt{a_2 a_3} + \sqrt{a_2 a_4} + \sqrt{a_3 a_4} \leq \frac{3}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4).$$

Soluţie. Din inegalitatea mediilor putem scrie succesiv :

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \ ; \quad \sqrt{a_1 a_3} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_3) \ ; \quad \sqrt{a_1 a_4} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_4) \ ;$$

$$\sqrt{a_2 a_3} \leq \frac{1}{2}(a_2 + a_3) \ ; \quad \sqrt{a_2 a_4} \leq \frac{1}{2}(a_2 + a_4) \ ; \quad \sqrt{a_3 a_4} \leq \frac{1}{2}(a_3 + a_4).$$

Adunând aceste inegalitaţi, membru cu membru şi dând factor comun pe 3 obţinem :

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\sqrt{a_1a_4}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_2a_4}+\sqrt{a_3a_4}\le\frac{1}{2}(3a_1+3a_2+3a_3+3a_4)=$$
$$=\frac{3}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4)\ .$$

Relaţia cerută este o aplicaţie imediată a inegalităţii mediilor. Evident egalitate obţinem pentru $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Generalizare: Dacă a_1 , a_2 , . . . a_n sunt numere reale pozitive atunci :

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_1a_n}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\le\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\ .$$

Aplicaţia 3

Scrieţi in ordine crescătoare numerele :

$$a_0=a, a_1=\sqrt{a_0b_0}\ ,\ a_2=\sqrt{a_1b_1}, a_3=\sqrt{a_2b_2}\ ;$$

$$b_0=b, b_1=\frac{a_0+b_0}{2}, b_2=\frac{a_1+b_1}{2}, b_3=\frac{a_2+b_2}{2}$$ ştiind că $0 < a < b$.

Soluţie. Dacă $a < b$ atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$ şi $a<\sqrt{ab}<b$, conform priorităţiilor mediilor. Pe de altă parte , $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ (inegalitatea este stricată pentru ca $a \neq b$) deci :

$$a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b,$$

adică $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$.

Repetăm raţionamentul pentru $a_1 < b_1$ şi obţinem :

$$a_1<\frac{a_1+b_1}{2}<b_1, a_1<\sqrt{a_1b_1}<b_1$$

şi acum $\sqrt{a_1b_1}<\frac{a_1+b_1}{2}$, rezultă $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. Analog, $a_2 < a_3 < b_3 < b_2$.

Din cele trei şiruri de inegalităţi rezultă ordonarea cerută :

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < b_3 < b_2 < b_1 < b_0\ .$$

Generalizare:

Dacă se dădeau numerele a şi b cu $0 < a < b$ şi :

$$a_0 = a,\ a_1 = \sqrt{a_0 b_0},\ \ldots a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}};$$

$$b_0 = b,\ b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},\ \ldots, b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

atunci, repetând raţionamentul, obţinem ordinea :

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_n < b_n < \ldots < b_1 < b_0$$

de unde putem observa că numerele a_i sunt în ordine crescătoare, iar numerele b_i sunt în ordine descrescătoare .

Bibliografie

1. M. Burtea, G. Burtea Matematică- manual pentru clasa a IX-a, Editura Carminis, 2004

2. A. Ghioca, N. Teodorescu, Culegere de probleme, SSMR, Bucureşti, 1987

3. M. Ganga, Matematică- manual pentru clasa a IX-a, Editura Mathpress, Ploieşti, 2004