FORMA ALGEBRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

Prof. Adrian Ioan Pop
Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai”, Baia Mare

Forma algebrică a unui număr complex $z \in \mathbf{C}$ este

$z = a + bi, a, b \in \mathbf{R}$ unde $i^2 = -1$

Un număr complex este bine determinat dacă i se cunoaşte partea reală a şi partea imaginară bi.

$a = \mathrm{Re}(z)$ se numeşte partea reală a numărului complex z.

$b = \mathrm{Im}(z)$ se numeşte coeficientul părţii imaginare a numărului complex z.

<u>Numere complexe conjugate</u>

<u>Definiţie</u>: Fie $z = a + bi \in \mathbf{C}$. Se numeşte conjugatul lui z, notat $\overline{z}$, numărul complex $\overline{z} = a - bi$. Din definiţie rezultă că z este conjugatul lui $\overline{z}$ prin urmare $\overline{(\overline{z})} = z$. Spunem că numerele $z, \overline{z}$ sunt unul conjugatul celuilalt.

Proprietăţi:

1. suma a două numere complexe conjugate este un număr real.

   $z + \overline{z} \in \mathbf{R}, \quad \forall\, z \in \mathbf{C}$

2. produsul a două numere complexe conjugate este un număr real.

   $z \cdot \overline{z} \in \mathbf{R}, \forall z \in \mathbf{C}$

3. conjugatul sumei a două numere complexe este egal cu suma conjugatelor celor două numere complexe.

   $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ 1

   Demonstraţie:

   Fie $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i,$ doua numere complexe pentru care $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i.$ avem: $\overline{z_1 + z_2} = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)i =$

   $= a_1 + a_2 - b_1 i - b_2 i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

   Observaţie:

   a) proprietatea ramâne adevarată şi pentru n numere complexe $z_1, z_2, ..., z_n$ şi scriem:

   $$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

   b) evident, conjugatul diferenţei este egal cu diferenţa conjugatelor pentru două numere complexe, adică: $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

4. conjugatul produsului a două numere complexe este egal cu produsul conjugatelor celor două numere:

   $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

   Observatie:

   a) proprietatea ramâne adevarată pentru n numere complexe $z_1, z_2, ..., z_n$, când avem: $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$

b) în cazul particular când numerele complexe sunt egale $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, atunci:

$\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ (conjugatul puterii unui numar complex este egal cu puterea conjugatului acelui număr).

5. conjugatul câtului a două numere complexe este egal cu câtul conjugatelor celor două numere

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}, z_2 \neq 0$$

6. $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$(Pentru a proba ca un numar z este real, se demonstrează egalitatea $z = \overline{z}$)

7. $z \in \mathbf{R} \cdot i \Leftrightarrow z = -\overline{z}$ (pentru a proba ca un numar complex este pur imaginar, se demonstrează egalitatea $z = -\overline{z}$.

Modulul unui număr complex

Definiţie: Fie $z = a + bi, a, b \in \mathbf{R}$. Se numeşte modulul lui z, notat $|z|$, numărul pozitiv

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proprietăţile modulului

1. $\forall z \in \mathbf{C}, z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
2. $z = a + bi \in \mathbf{C}, |z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
3. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbf{C}$;
4. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
7. $|z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_n|$;
8. $|z_1^n| = |z_1|^n$

Rezolvarea ecuaţiei de gradul II cu coeficienţi reali

Se consideră ecuaţia

$ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in \mathbf{R}; a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Cazul 1: $\Delta > 0$ atunci ecuaţia are două soluţii reale şi distincte :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Cazul 2: $\Delta = 0$ atunci ecuaţia are două soluţii reale şi egale (o soluţie dublă)

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Cazul 3: $\Delta < 0$ atunci ecuaţia nu are soluţii reale, dar are două soluţii complexe:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

<u>Puterile numărului complex i</u>

Daca $n \in \mathbf{N}$ atunci
$$i^n = \begin{cases} 1, dacã : n = 4k \\ i, dacã : n = 4k+1 \\ -1, dacã : n = 4k+2 \\ -i, dacã : n = 4k+3 \end{cases}$$

<u>Probleme:</u>

1. Dacă $z, u \in \mathbf{C}$ cu $|z| = |u| = 1$ si $z \cdot u + 1 \neq 0$, arătaţi că $\frac{z+u}{1+z\cdot u} \in \mathbf{R}$.

<u>Rezolvare</u> Fie $w = \frac{z+u}{1+z\cdot u}$

$$\left.\begin{aligned} z\cdot\overline{z} = |z|^2 \\ |z| = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z\cdot\overline{z} = 1 \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{\overline{z}} \\ \overline{z} = \frac{1}{z} \end{cases}$$

$$u\cdot\overline{u} = |u|^2 = 1 \Rightarrow \overline{u} = \frac{1}{u}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{z+u}{1+z\cdot u} \\ \overline{w} &= \frac{\overline{z}+\overline{u}}{1+\overline{z}\cdot\overline{u}} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{u}} = \frac{\frac{u+z}{z\cdot u}}{\frac{z\cdot u+1}{z\cdot u}} = \frac{z+u}{1+z\cdot u} \end{aligned}\right\} \Rightarrow w = \overline{w} \Rightarrow w \in \mathbf{R}$$

2. Dacă $z \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ şi $\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1} \in \mathbf{R}$, arătaţi că $|z| = 1$.

<u>Rezolvare:</u>

Fie $w = \frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}$

$$\left.\begin{aligned} & w \in \mathbf{R} \Rightarrow w = \overline{w} \Rightarrow \frac{z^2+z+1}{z^2-z+1} = \frac{\overline{z}^2+\overline{z}+1}{\overline{z}^2-\overline{z}+1} \\ & |z| = r, r \geq 0; z\cdot\overline{z} = |z|^2 = r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^4 - r^2 z + z^2 + r^2\bar{z} - r^2 + z + \bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = r^4 + r^2 z + z^2 - r^2\bar{z} - r^2 - z + \bar{z}^2 + \bar{z} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2r^2 z - 2r^2\bar{z} - 2z + 2\bar{z} = 0 \,|:2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2(z-\bar{z}) - (z-\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(z-\bar{z})\cdot(r^2-1)=0 \\ z\in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R} \Rightarrow z\neq\bar{z}\end{matrix}\right\} \Rightarrow r^2 = 1, r\geq 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ dat prin termenul general $a_n = \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right|, n\geq 1$, unde $z\in\mathbf{C}^*$ este dat .

a) Demonstraţi că dacă $a_1 > 2$, atunci $a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \forall n\in N^*$

b) Demonstraţi că dacă $\exists\ k\in\mathbf{N}^*$ astfel încât $a_k \leq 2$, atunci $a_1 \leq 2$.

<u>Rezolvare:</u>

a) din $a_1 > 2 \Rightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right| > 2 \Rightarrow 2\cdot\left|z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right| < \left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot\left|z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right| =$

$$= \left|z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}}\right| \leq \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| + \left|z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\right| \Rightarrow 2a_{n+1} < a_n + a_{n+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

Obs. $\mathrm{a_n} \neq 0, \forall \mathrm{n}\in\mathrm{N}^*$ în caz contrar

$\exists \mathrm{n}\in\mathrm{N}^*$ astfel încât $\mathrm{a_n} = \left|\mathrm{z^n} + \frac{1}{\mathrm{z^n}}\right| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{z^n} = \frac{-1}{\mathrm{z^n}} \Rightarrow \mathrm{z^{2n}} = -1 \Rightarrow |\mathrm{z}| = 1$.

Dar $\mathrm{a_1} = \left|\mathrm{z} + \frac{1}{\mathrm{z}}\right| \leq |\mathrm{z}| + \left|\frac{1}{\mathrm{z}}\right| = 2$, contradicţie cu $a_1 > 2$.

b) Presupunem prin absurd că $a_1 > 2 \Rightarrow a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n+2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < a_{n+2} - a_{n+1}; \forall n\in\mathbf{N}^* \Rightarrow$ şirul $(a_{n+1} - a_n)$ este strict crescător $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{a_{n+1}} - \mathrm{a_n} > \mathrm{a_2} - \mathrm{a_1} \Rightarrow \mathrm{a_{n+1}} - \mathrm{a_n} > \left|\mathrm{z}^2 + \frac{1}{\mathrm{z}^2}\right| - \left|\mathrm{z} + \frac{1}{\mathrm{z}}\right| \qquad (1)$$

Dar $a_1 > 2 \Rightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right| > 2 \Rightarrow 2\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right| < \left|z+\frac{1}{z}\right|^2 = \left|z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\right| \leq$

$$\leq \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| + 2 < \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| + \left|z + \frac{1}{z}\right| \Rightarrow \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| > \left|z + \frac{1}{z}\right| \Rightarrow a_2 > a_1 \qquad (2)$$

Din (1) si (2) $\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0; \forall n\in N^* \Rightarrow (a_n)_{n\in N^*}$ strict crescător $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \geq a_1 > 2$ contradicţie cu ipoteza.

4. Fie $v, w\in\mathbf{C}^*$ distincte. Să se arate că $|zw + \bar{w}| \leq |zv + \bar{v}|$, pentru orice $z\in\mathbf{C}, |z| = 1$, dacă şi numai dacă $\exists k\in[-1,1]$, astfel încât $w = k\cdot v$.

Rezolvare:

"$\Leftarrow$" considerăm că $\exists k \in [-1,1]$ astfel încât $w = k \cdot v$

$\left|z \cdot w + \overline{w}\right| = \left|z \cdot k \cdot v + k \cdot \overline{v}\right| = |k| \cdot \left|z \cdot v + \overline{v}\right| \le \left|z \cdot v + \overline{v}\right|$ pentru $\forall z \in \mathbf{C}; |z| = 1$

"$\Rightarrow$" considerăm că $\left|z \cdot w + \overline{w}\right| \le \left|z \cdot v + \overline{v}\right|$, pentru $\forall z \in \mathbf{C}$ cu $|z| = 1$

Fie $t > 1$ astfel încât $w - t \cdot v \ne 0$ si $z = \dfrac{t \cdot \overline{v} - \overline{w}}{w - t \cdot v}$

Pentru $v = a + bi; w = c + di; a, b, c, d \in R$ obţinem:

$z = \dfrac{t(a - bi) - (c - di)}{c + di - t(a + bi)} = \dfrac{ta - c + i(d - bt)}{c - ta + i(d - bt)} \Rightarrow |z| = 1$

Din ipoteză (1) $\Rightarrow \left|z \cdot w + \overline{w}\right| \le \left|z \cdot v + \overline{v}\right|$

Dar $zw + \overline{w} = \dfrac{t \cdot \overline{v} - \overline{w}}{w - t \cdot v} \cdot w + \overline{w} = \dfrac{t \cdot \overline{v} \cdot w - \overline{w} \cdot w + w \cdot \overline{w} - t \cdot v \cdot \overline{w}}{w - t \cdot v} = \dfrac{t(w \cdot \overline{v} - v \cdot \overline{w})}{w - t \cdot v}$ (2)

$z \cdot v + \overline{v} = \dfrac{t \cdot \overline{v} \cdot v - \overline{w} \cdot v}{w - t \cdot v} + \overline{v} = \dfrac{t \cdot \overline{v} \cdot v - \overline{w} \cdot v + w \cdot \overline{v} - t \cdot v \cdot \overline{v}}{w - t \cdot v} = \dfrac{w \cdot \overline{v} - \overline{w} \cdot v}{w - t \cdot v}$ (3)

Din (2) si (3) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|z \cdot w + \overline{w}\right| = t \cdot \left|z \cdot v + \overline{v}\right|, t > 1 \\ \left|z \cdot w + \overline{w}\right| \le \left|z \cdot v + \overline{v}\right| (ip.) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|z \cdot w + \overline{w}\right| = \left|z \cdot v + \overline{v}\right| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z \cdot w + \overline{w} = z \cdot v + \overline{v} = 0 \Rightarrow \dfrac{\overline{w}}{w} = \dfrac{\overline{v}}{v} = -z; (w, v \in C^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{w}{v} = \dfrac{\overline{w}}{\overline{v}} \Rightarrow \dfrac{w}{v} \in R$; notăm $\dfrac{w}{v} = k \in R$

Prin înlocuire in (1) obţinem: $\left|z \cdot k \cdot v + k \cdot \overline{v}\right| \le \left|z \cdot v + \overline{v}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow |k| \cdot \left|z \cdot v + \overline{v}\right| \le \left|z \cdot v + \overline{v}\right| \Rightarrow |k| \le 1 \Rightarrow k \in [-1,1]$

5. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ si $\alpha \in \mathbf{C}$ o soluţie a ecuaţiei $z^2 + z + 1 = 0$

Arătaţi că:

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha)$

b) $a^3 + b^3 = (a + b)(a + \alpha b)(a + \alpha^2 b)$

Rezolvare:

din ipoteză $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \\ \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha^3 = 1$

a) se ştie: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ (1)

calculăm $(a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha) =$

$= (a+b+c)(a^2 + ab\alpha^2 + ac\alpha + ab\alpha + b^2\alpha^3 + bc\alpha^2 + ac\alpha^2 + cb\alpha^4 + c^2\alpha^3 =$

$= (a+b+c)[a^2 + b^2\alpha^3 + c^2\alpha^3 + ab(\alpha^2+\alpha) + bc(\alpha^2+\alpha^4) + ac(\alpha^2+\alpha)$

Dar $\alpha^3 = 1$ si $\alpha^2 + \alpha = -1$

$\Rightarrow (a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \quad (2)$

Din (1) si (2) $\Rightarrow$ egalitatea.

b)

$$\left.\begin{array}{l} a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ (a+b)(a+\alpha b)(a+\alpha^2 b) = (a+b)(a^2+ab\alpha^2+ab\alpha+b^2\alpha^3) = \\ = (a+b)[a^2+(\alpha^2+\alpha)\cdot ab + b^2\alpha^3] = (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{egalitatea}$$

6. Fie $z \in \mathbf{C}^*; i = \overline{1,4}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ si $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$

Arătaţi că pentru orice număr natural impar are loc egalitatea:

$\frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} + \frac{1}{z_3^n} + \frac{1}{z_4^n} = 0$.

<u>Rezolvare:</u>

Din ipoteză $\Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 0$

Fie $|z_i| = r; i = \overline{1,4}; z_i \cdot \overline{z_i} = r^2$

Avem $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = \frac{\overline{z_1}}{r^2} + \frac{\overline{z_2}}{r^2} + \frac{\overline{z_3}}{r^2} + \frac{\overline{z_4}}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{z_1+z_2}{z_1\cdot z_2} + \frac{z_3+z_4}{z_3\cdot z_4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)\left(\frac{1}{z_1\cdot z_2} - \frac{1}{z_3\cdot z_4}\right) = 0$

- Cazul I: $z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow z_3 + z_4 = 0$

  Pentru n-impar: $\frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} + \frac{1}{z_3^n} + \frac{1}{z_4^n} = \frac{1}{z_1^n} - \frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_3^n} - \frac{1}{z_3^n} = 0$

- Cazul II: $\frac{1}{z_1\cdot z_2} = \frac{1}{z_3\cdot z_4} \Rightarrow z_1\cdot z_2 = z_3\cdot z_4$

  Avem: $(z_1+z_3)(z_1+z_4) = z_1^2 + z_1(z_3+z_4) + z_3\cdot z_4 =$

  $= z_1^2 + z_1(-z_1-z_2) + z_1\cdot z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = -z_3$ sau $z_1 = -z_4$

a) Dacă $\left.\begin{array}{l} z_1 = -z_3 \\ z_1 z_2 = z_3 z_4 \end{array}\right\} \Rightarrow z_2 = -z_4 \Rightarrow \frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} + \frac{1}{z_3^n} + \frac{1}{z_4^n} = \frac{1}{z_1^n} - \frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} - \frac{1}{z_2^n} = 0$ pentru n-impar

b) Dacă $\left.\begin{array}{l} z_1 = -z_4 \\ z_1\cdot z_2 = z_3\cdot z_4 \end{array}\right\} \Rightarrow z_2 = -z_3 \Rightarrow \textit{concluzia}$

7. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ cu $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ si $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

Arătaţi că: $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

Rezolvare:

Din $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} = z_3 \cdot \overline{z_3} = 1$ şi $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \dfrac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1 z_2 z_3|} =$

$$= \left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3}\right| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right| = \left|\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right| = |z_1 + z_2 + z_3| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = |z_1 + z_2 + z_3|; \qquad (1)$$

Avem

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2 \cdot |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2 \cdot |z_1 + z_2 + z_3| \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 2; \text{ deoarece } z_1 + z_2 + z_3 \neq 0.$$

8. Fie $a, b \in \mathbf{C}^*$ cu $|a+b| = |a| + |b|$. Calculaţi $\dfrac{b}{a}$.

Fie $\dfrac{b}{a} = x + yi$; $x, y \in \mathbf{R}$.

Din $|a| = |b| \Rightarrow \left|\dfrac{b}{a}\right| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Din $|a+b| = |a| \Rightarrow \left|1 + \dfrac{b}{a}\right| = 1 \Rightarrow (1+x)^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (1+x)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)^2 - x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \\ sau \\ \dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \end{cases}$$

Bibliografie

- Mircea Ganga Matematică Manual pentru clasa a X-a, Editura Mathpress 2005
- *Marian Andronache, Dan Schwarz, Radu Gologan, Dinu Şerbănescu,* "Olimpiada matematică 2006 – 2010 etapele judeţeană şi naţională" – Editura Sigma, 2010
- *Adriana Dragomir, Lucian Dragomir, Ovidiu Badescu, Ion Demian Birchi* „Exercitii si probleme de matematica pentru clasa a X-a - RMT" – Editura Birchi, 2011