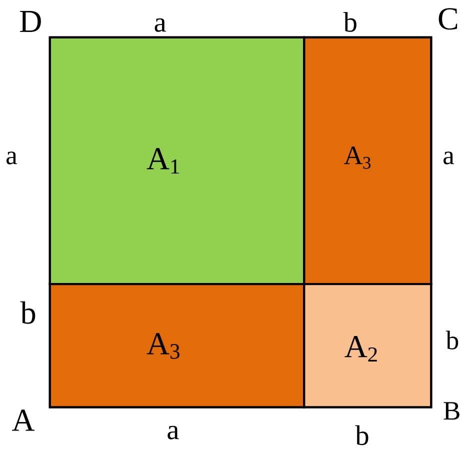
APLICAŢII ALE GEOMETRIEI
ÎN ALGEBRĂ

Profesor Florea Adrian
Şcoala Gimnazială „Avram Iancu"
Bucureşti

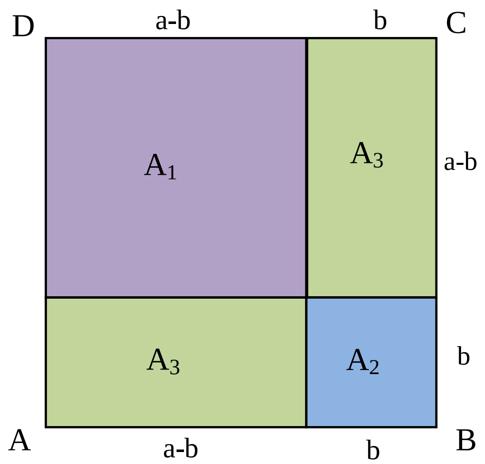
Frumuseţea matematicii constă şi în înţelegerea unităţii ei, a naturii ei necontradictorii, în descoperirea legăturilor nebănuite uneori între ramurile şi capitolele sale. Dacă Aritmetica şi Algebra se folosesc în Geometrie în special pentru calcularea valorilor unor mărimi: lungimi de segmente, arii, volume, măsuri de unghiuri, reciproc, şi Geometria poate avea frumoase aplicaţii în Algebră. Ne propunem în continuare prezentarea unor astfel de aplicaţii.

1. **Binomul sumă la pătrat** $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$



Considerăm un pătrat ABCD cu lungimea laturii $a+b$.
Construim două drepte perpendiculare situate la distanţa a şi respectiv b faţă de vârful A al pătratului.
A_1 este aria pătratului cu latura de lungime a, A_2 este aria aria pătratului cu latura de lungime b, iar A_3 sunt ariile celor două dreptunghiuri cu lungimea a şi lăţimea b.
Aria pătratului ABCD este egală cu suma $A_1+A_2+2A_3$.
Înlocuind obţinem $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+b^2+2ab}$**.**

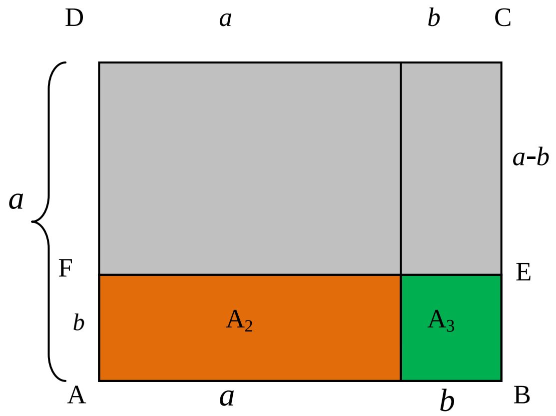
2. **Binomul diferenţă la pătrat** $\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$



Considerăm acum un pătrat ABCD cu latura de lungime a.
Construim două drepte perpendiculare situate la distanţa b faţă de vârful B.
Se formează pătratul cu latura $a-b$ şi aria A_1, pătratul cu latura b şi aria A_2 şi două dreptunghiuri cu lungimea $a-b$ şi lăţimea b, ariile lor fiind notate cu A_3.
$A_1=A_{ABCD}-A_2-2A_3$.
Înlocuind obţinem $(a-b)^2=a^2-b^2-2b(a-b)\Rightarrow$
$(a-b)^2=a^2-b^2-2ab+2b^2\Rightarrow \boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$

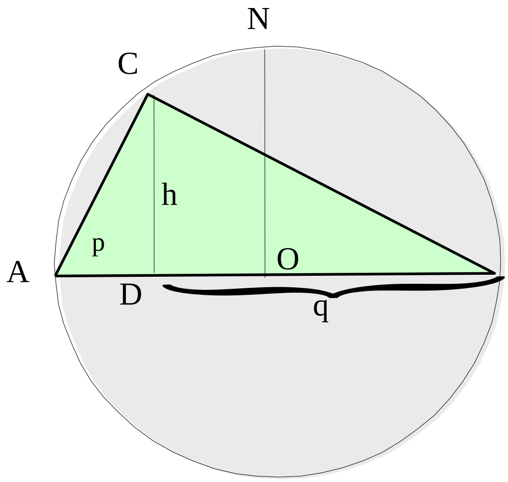
3. **Produsul sumei cu diferenţa** $\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

Considerăm un dreptunghiABCD cu lungimea $a+b$ şi lăţimea a.
Construim două drepte perpendiculare situate la distanţa b faţă de vârful B.
Aria dreptunghiului DCEF va fi egală cu diferenţa dintre aria ABCD şi suma ariilor A_2 şi A_3.
$(a+b)(a-b)=a(a+b)-(ab+b^2) \Rightarrow$
$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2$ adică $\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$



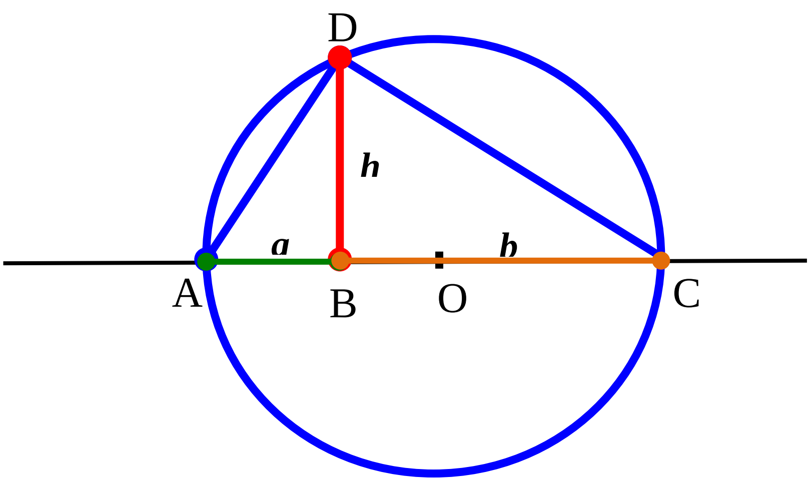
1. O frumoasă aplicaţie a teoremei înălţimii este demonstrarea **inegalităţii mediilor** a două numere pozitive (aritmetică şi geometrică) :

Se consideră un cerc de centru O.
În semicercul de diametru AB se înscrie un triunghi dreptunghic ABC, vârful C având o poziţie oarecare pe semicerc. Se duce $CD \perp AB$, se notează CD=h, AD=p şi DB=q. Conform teoremei înălţimii avem $h^2=p \cdot q \Rightarrow h=\sqrt{pq}$ (1), adică h reprezintă media geometrică (m_g) a numerelor p şi q.
Din CD < ON (raza) $\Rightarrow h < \frac{p+q}{2}$ (2), care este media aritmetică (m_a) a numerelor p şi q. Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $m_g < m_a$.
Dacă punctul C coincide cu punctul N, atunci CD este egal cu raza, p=q şi $m_g=m_a$. Astfel că în general, $m_g \leq m_a$.



2. Folosind teorema înălţimii se poate construi un segment care să aibă lungimea egală cu media geometrică a lungimilor a două segmente date.
Considerăm două segmente cu lungimile ***a*** şi ***b*** şi vrem să găsim un segment care să aibă lungimea egală cu media geometrică a lui ***a*** şi ***b***.

Pe o dreaptă ***d*** construim segmentele AB=***a*** şi BC=***b***. Cu ajutorul compasului găsim mijlocul O al segmentului AC. Construim cercul cu diametrul AC, apoi ridicăm în punctual B o perpendicular pe AC, care intersectează cercul în punctual D. ΔADC este dreptunghic (fiind înscris într-un semicerc), iar DB este înălţime. Conform teoremei înălţimii, $DB^2=\boldsymbol{a \cdot b}$, adică DB este segmentul căutat.



Cubul binomului

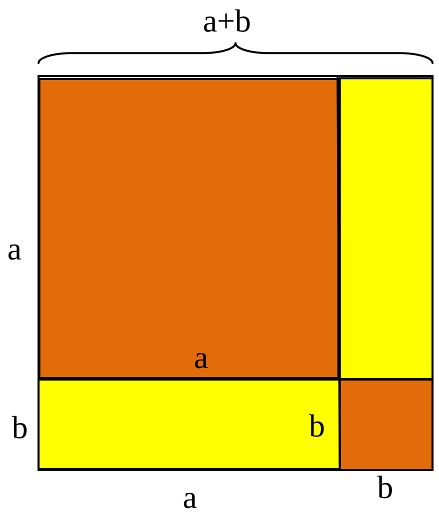


figura 1

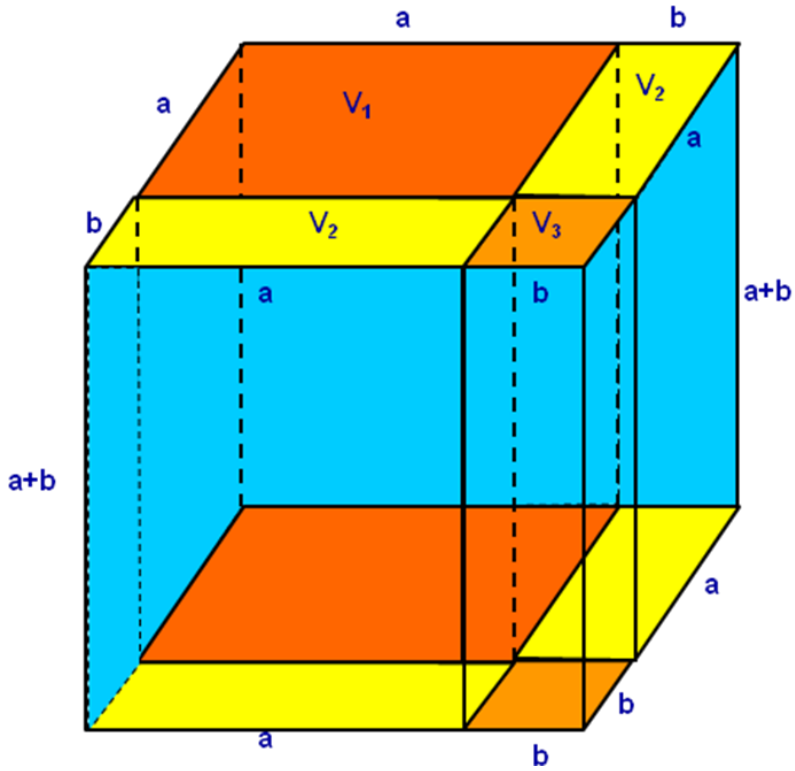


figura 2

Pe baza superioară a unui cub cu lungimea muchiei ($a+b$) cm se trasează două drepte perpendiculare care să determine în pătrat două pătrate cu laturile egale cu *a,* respectiv *b* *(figura 1)*. Secţionăm cubul, prin cele două drepte, cu două plane perpendiculare *(figura 2).*
Se formează astfel două prisme patrulatere regulate cu volumele V_1 respectiv V_3 și două paralelipipede dreptunghice egale, cu volumele V_2.
Volumul cubului este egal cu suma volumelor celor patru paralelipipede dreptunghice.
$V_1=a\cdot a\cdot(a+b)=a^3+a^2b$
$V_2=a\cdot b\cdot(a+b)=a^2b+ab^2$
$V_3=b\cdot b\cdot(a+b)=ab^2+b^3$
$V_{cub}=V_1+2\cdot V_2+V_3$
$(a+b)^3= a^3+a^2b+2(a^2b+ab^2)+ ab^2+b^3$
și găsim relaţia: $\mathbf{(a+b)^3= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

Bibliografie

STEINHAUS, H., *Caleidoscop matematic*, Editura tehnică, Bucureşti, 1961.

VODA, V, Gh., *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.

PAUN, Gh., *Din spectacolul matematicii*, Editura Albatros, Bucureşti, 1983.

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii. Antichitatea, Evul mediu, Renaşterea,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

MOISIL, Gr., C. *Îndoieli şi certitudini*, Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1971.